

**Sistema FIEB**



**CENTRO UNIVERSITÁRIO SENAI CIMATEC**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL**  
**E TECNOLOGIA INDUSTRIAL**

**Tese de Doutorado**

**APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS EM**  
**PROBLEMAS DE GEOCIÊNCIAS: SOLUÇÕES ANALÍTICAS USANDO**  
**O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO**

Apresentada por: José Humberto de Souza Prates

Orientador: Dr. Davidson Martins Moreira

Salvador

2022

José Humberto de Souza Prates

**APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS EM  
PROBLEMAS DE GEOCIÊNCIAS: SOLUÇÕES ANALÍTICAS USANDO  
O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Curso de Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do SENAI CIMATEC, como requisito parcial para a obtenção título de Doutor em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial.

Área de conhecimento: Interdisciplinar.

Orientador: Dr. Davidson Martins Moreira.

*SENAI CIMATEC*

Salvador

2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Centro Universitário SENAI CIMATEC

P915a Prates, José Humberto de Souza

Aplicação das equações diferenciais fracionárias em problemas de geociências: soluções analíticas usando o método da decomposição / José Humberto de Souza Prates. – Salvador, 2022.

58 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Davidson Martins Moreira.

Tese (Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial) – Programa de Pós-Graduação, Centro Universitário SENAI CIMATEC, Salvador, 2022. Inclui referências.

1. Equações diferenciais. 2. Geociências. 3. Equações diferenciais fracionárias. 4. Método da decomposição por Laplace. 5. Derivadas conformáveis I. Centro Universitário SENAI CIMATEC. II. Moreira, Davidson Martins. III. Título.

CDD 515.35

---

## Nota sobre o estilo do PPGMCTI

---

Esta tese de doutorado foi elaborada considerando as normas de estilo (i.e. estéticas e estruturais) propostas aprovadas pelo colegiado do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial e estão disponíveis em formato eletrônico (*download* na Página Web <http://ead.fieb.org.br/portal/faculdades/dissertacoes-teses-mcti.html> ou solicitação via e-mail na secretaria do programa) e em formato impresso somente para consulta.

Ressalta-se que o formato proposto considera diversos itens das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), entretanto opta-se, em alguns aspectos, seguir um estilo próprio elaborado e amadurecido pelos Professores do programa de pós-graduação supracitado.

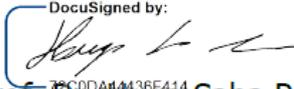
# SENAI CIMATEC

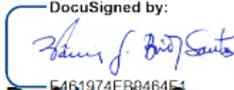
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial  
Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

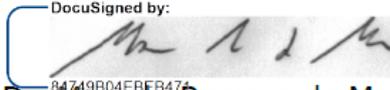
A Banca Examinadora, constituída pelos professores abaixo listados, leram e recomendam a aprovação da Tese de Doutorado, intitulada "**APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS EM PROBLEMAS DE GEOCIÊNCIAS: SOLUÇÕES ANALÍTICAS USANDO O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO**", apresentada no dia (18) de (fevereiro) de (2022), como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**.

Orientador:   
Prof. Dr. Davidson Martins Moreira  
SENAI CIMATEC

Membro Interno:   
Prof. Dr. Renelson Ribeiro Sampaio  
SENAI CIMATEC

Membro Interno:   
Prof. Dr. Hugo Saba Pereira Cardoso  
SENAI CIMATEC

Membro Externo:   
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vania Gonçalves de Brito dos Santos  
UNEB

Membro Externo:   
Prof. Dr. Marcelo Romero de Moraes  
UNIPAMPA

“O melhor trabalho do matemático é a arte, uma arte de alta perfeição, tão ousada quanto os mais secretos sonhos da imaginação, clara e límpida. O gênio matemático e o gênio artístico encontram-se um com o outro.”

**Gösta Mittag-Leffle**

## **Agradecimentos**

---

A vida é cheia de desafios. Desafios estes que oscilam em sua dificuldade. A cada momento há algo, seja o novo, formidável, ou simplesmente o familiar. O que para uns é um gigante invencível, para outros uma luta a vencer. A convivência é uma habilidade que precisa e deve ser muito bem administrada, em todos os momentos de nossa vida. Em primeiro lugar, agradeço a Deus por todos os momentos, ao meu Professor e Orientador Dr. Davidson Martins Moreira, que, com sabedoria, soube clarear o meu caminho nos momentos mais difíceis e por acreditar sempre em mim. Sem ele jamais chegaria aqui. Agradeço a todos do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial que me receberam com carinho e dedicação. À minha família, minha esposa Luciene, meus filhos Lilach, Moira e Kelvin Prates, pela confiança, carinho, apoio e abraços nos momentos em que mais precisei. Aos meus pais queridos pelo incentivo, aos meus inesquecíveis amigos, professores, colaboradores, os quais repartiram comigo vários momentos durante toda minha jornada, sendo que estes entraram em minha vida por alguma razão em uma estação ou para sempre. Obrigado a todos!

## Resumo

---

Neste trabalho, soluções analíticas de equações diferenciais fracionárias são obtidas para três problemas tradicionais da geofísica: (i) o caso de uma fonte pontual localizada na superfície injetando corrente elétrica no subsolo; (ii) o caso de uma onda eletromagnética plana, e (iii) o caso de uma fonte pontual liberando poluentes atmosféricos. Na obtenção das soluções analíticas dos problemas propostos foi utilizado o método da decomposição por Laplace (MDL), o qual fornece uma solução em séries de rápida convergência. Em particular, para o problema de dispersão de poluentes na camada limite planetária, foi obtida uma solução da equação de difusão-advectação tridimensional usando o método MDL em duas variáveis, considerando a derivada de Caputo (não-local) e a derivada conformável (local). A modelagem matemática proposta representa um avanço importante na área tendo em vista que o cálculo fracionário é a generalização do cálculo tradicional de ordem inteira. Também foi resolvida semi-analiticamente a equação de difusão-advectação transiente 2D. Para esta solução foi utilizada a transformada dupla de Laplace e a inversa numérica Fixed-Talbot.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais; geociências; Equações diferenciais fracionárias; Método da decomposição por Laplace; Derivadas conformáveis.

## **Abstract**

---

In this work, analytical solutions of fractional differential equations are obtained for three traditional problems in geophysics: (i) the case of a point source located on the surface injecting electric current into the ground; (ii) the case of a plane electromagnetic wave, and (iii) the case of a point source releasing atmospheric pollutants. To obtain the analytical solutions of the proposed problems, the method of decomposition by Laplace (MDL) was used, which provides a solution in fast convergence series. In particular, for the problem of dispersion of pollutants in the planetary boundary layer, a solution of the three-dimensional diffusion-advection equation was obtained using the CDM method in two variables, considering the Caputo derivative (non-local) and the conformable derivative (local). The proposed mathematical modeling represents an important advance in the area, considering that the fractional calculus is the generalization of the traditional whole order calculus. The 2D transient diffusion-advection equation was also semi-analytically solved. For this solution, the double Laplace transform and the numerical inverse Fixed-Talbot were used.

**Keywords:** Differential equations; geosciences; Fractional differential equations; Modified Laplace decomposition method; Conformal derivatives.

## Sumário

---

<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>10</b>
1. Introdução.....	10
1.1 Definição do problem.....	14
1.2 Objetivo.....	15
1.2.1 Geral.....	15
1.2.2 Específicos.....	15
1.3 Hipóteses .....	15
1.4 Aspectos metodológicos .....	16
1.5 Organização da tese .....	16
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>18</b>
2.1 Histórico e revisão bibliográfica .....	18
<b>Capítulo 3 .....</b>	<b>23</b>
3. Fundamentação Teórica .....	23
3.1 Método da decomposição de Laplace(LDM) .....	23
3.2 Derivadas fracionárias.....	26
3.3 Função Gamma.....	28
3.4 Função de Mittag Leffler.....	28
3.5 Inversão numérica da transformada de Laplace.....	29
3.6 Algoritmo Fixed Talbot.....	30
3.7 Aplicação da derivada fracionária no método da resistividade magnetométrica (MMR).....	31
3.7.1 O método MMR.....	31
3.7.2 O caso da resistividade constante.....	33
3.7.3 Modelagem fracionária para resistividade constante.....	36
3.7.4. O caso da resistividade variando com a profundidade z.....	38
3.8. Métodos Geofísicos eletromagnéticos.....	42
3.8.1 O caso das ondas eletromagnéticas planas .....	43
3.8.2. ondas eletromagnéticas planas fracionária.....	47
3.9 Solução da equação difusão-advecção 3D, estacionária, fracionária .....	50

3.9.1 Solução da equação difusão-advecção usando Caputo.....	57
3.9.2 Solução com derivadas conformáveis.....	60
3.10 Uma abordagem semi-analítica na solução da equação de difusão-advecção bidimensional transiente fracionária para estudo da dispersão de poluentes na camada limite planetária.....	64
3.10.1 Difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem inteira.....	64
3.10.2 Difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem fracionária usando Caputo.....	67
3.10.3. Difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem fracionária usando Conformável.....	70
<b>Capítulo 4 .....</b>	<b>75</b>
4. Resultados .....	75
4.1 Resultados numéricos da Aplicação da derivada fracionária no método da resistividade magnetométrica (MMR).....	75
4.2 Resultados numéricos do caso das ondas eletromagnéticas planas .....	81
4.2.1 Envoltória.....	83
4.3 Resultados Numéricos da solução da equação difusão-advecção 3D, estacionária, fracionária .....	87
<b>Capítulo 5 .....</b>	<b>74</b>
5.1 Conclusões.....	98
5.2 Referências.....	101

## Lista de figuras

---

<b>Figura 1:</b> Onda eletromagnética no espaço vazio.....	<b>48</b>
<b>Figura 2:</b> Teste de convergência para Eq. (50), em comparação com Eq. (51), para: a) $r = 100$ m, $z = 80$ m; b) $r = 100$ m, $z = 50$ m; c) $r = 1000$ m, $z = 100$ m .....	<b>75</b>
<b>Figura 3:</b> Teste de convergência para Eq. (60), em comparação com Eq. (51), para $r = 100$ m e $z = 50$ m. ....	<b>77</b>
<b>Figura 4:</b> Comparação entre Eq. (50), de ordem inteira, e Eq. (60), de ordem fracionária ....	<b>77</b>
<b>Figura 5:</b> Campo magnético em função da distância radial considerando $\alpha = 1,7, 1,8, 1,9, 1,95$ e $2$ para: a) $z = 50$ m; b) $z = 100$ m; c) $z = 150$ m.....	<b>78</b>
<b>Figura 6:</b> Campo magnético em função da profundidade ( $z$ ), com $r = 1000$ m e $\alpha = 1,7, 1,8, 1,9, 1,95,$ e $2$ .....	<b>79</b>
<b>Figura 7:</b> Campo magnético em função da profundidade ( $z$ ), com $r = 1000$ m e: a) $\beta = 0,01$ ; b) $\beta = 0,05$ ( $\alpha = 0,7, 0,8, 0,9, 1$ ) .....	<b>80</b>
<b>Figura 8:</b> Campo magnético em função da profundidade $z$ , com $r = 500$ m: a) $\beta = 0,01$ ; b) $\beta = 0,05$ ( $\alpha = 0,7, 0,8, 0,9,$ e $1$ ).....	<b>80</b>
<b>Figura 9:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) com $\alpha = 1.9$ .....	<b>82</b>
<b>Figura 10:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) para $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$ . ....	<b>83</b>
<b>Figura 11:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) apresentando sua envoltória e a atenuação .....	<b>84</b>
<b>Figura 12:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.85$ .....	<b>84</b>
<b>Figura 13:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1$ . ....	<b>85</b>

<b>Figura 14:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.96$ .....	<b>85</b>
<b>Figura 15:</b> Campo elétrico (V/m) em função de $z$ (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.99$ . .....	<b>86</b>
<b>Figura 16:</b> Coeficiente do expoente da exponencial em função do parâmetro fracionário da equação (150) .....	<b>87</b>
<b>Figura 17:</b> Teste de convergência dos modelos: a) solução usando Caputo; b) solução usando derivadas conformáveis.....	<b>89</b>
<b>Figura 18.</b> Comparação entre as funções de Mittag-Leffler (A1) e a exponencial (A2): a) Mittag Leffler com $\varphi = 1$ m ; b) exponencial com $\varphi = 1$ m; c) Mittag-Leffler com $\varphi = 10^{-3}$ m; d) exponencial com $\varphi = 10^{-3}$ m.....	<b>91</b>
<b>Figura 19:</b> Concentração em função da distância da fonte para diferentes valores de $\alpha$ : a) $\varphi = 1$ m e $U_{115}$ ; b) $\varphi = 1$ m e $U_{10}$ ; c) $\varphi = 10^{-3}$ m e $U_{115}$ ; d) $\varphi = 10^{-3}$ m e $U_{10}$ .....	<b>92</b>

## **Lista de tabelas**

---

<b>Tabela 1:</b> Parâmetros meteorológicos e concentrações observadas durante as experiências de Copenhague. ....	<b>68</b>
<b>Tabela 2:</b> Índices estatísticos para a solução via Caputo.....	<b>94</b>
<b>Tabela 3:</b> Índices estatísticos para a solução via derivada conformável.....	<b>95</b>
<b>Tabela 4:</b> Valores dos parâmetros obtidos na avaliação estatística dos modelos considerados.....	<b>97</b>

## Lista de Siglas

---

CIMATEC	Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial;
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação;
FAPESB	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia
CLP	Camada limite planetária;
MDL	Método da decomposição por Laplace;
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace;
$\mathcal{L}^{-1}$	Transformada inversa de Laplace;
$T_\alpha$	Derivada conformável;
EDA	Equação de difusão-advecção;
EDO	Equação diferencial ordinária;
h	Altura da camada limite (m);
Hs	Altura da fonte (m);
Kx	Coefficiente de difusão turbulenta na direção x (m/s <sup>2</sup> );
Ky	Coefficiente de difusão turbulenta na direção y (m/s <sup>2</sup> );
Kz	Coefficiente de difusão turbulenta na direção z (m/s <sup>2</sup> );
u	Velocidade longitudinal do vento médio;
$\alpha$	Parâmetro de ordem fracionária;
$\delta$	Função delta de Dirac;
$\phi$	Parâmetro de correção dimensional;
c	Concentração média integrada lateralmente (g/m <sup>2</sup> );
$c_o$	Concentração observada experimentalmente (g/m <sup>2</sup> );
$c_p$	Concentração preditada pelo modelo (g/m <sup>2</sup> );
$U_{10}$	Velocidade média do vento medida a 10 m de altura (m/s);
$U_{115}$	Velocidade média do vento medida a 115 m de altura (m/s);
z	Domínio na direção vertical;
U	Velocidade média do vento na direção longitudinal (m/s);
V	Velocidade média do vento na direção transversal (m/s);
W	Velocidade média do vento na direção vertical (m/s);
x	Distância longitudinal da fonte (m);
$z_0$	Escala de comprimento de rugosidade (m);
$Q$	Intensidade da fonte (g/s);
n	número de termos na série;
$u_*$	Velocidade de fricção (m/s);
$w_*$	Escala de velocidade convectiva (m/s);
$E_\alpha$	Função de Mittag Lefler;
$\Gamma$	Função Gamma;
exp	Função exponencial;
$\lambda_n$	Autovalores;
$\sigma_w$	Desvio padrão da velocidade vertical (m/s);
FB	Desvio Fracional;
FS	Desvio Padrão Fracional;
NMSE	Erro quadrático Médio Normalizado;
FAT2	Representa a fração de dados que estão entre $0.5 \leq (C_p / C_o) \leq 2$
COR	Coefficiente de Correlação.

# Capítulo 1

## 1. Introdução

Na geociência é estudada a estrutura, composição, propriedades físicas e a dinâmica da terra. Ela traz a possibilidade de, além de estudar fenômenos como tsunamis, terremotos e vulcões e dispersão de poluentes, fazer levantamentos utilizando-se dos chamados métodos geofísicos. Estes métodos podem ser os mais variados possíveis, como: sísmicos, elétricos, eletromagnéticos, potenciais (magnético e gravimétrico), radiométricos e geotérmicos. Cada um destes métodos se utiliza de partes teóricas de áreas do conhecimento, como a física, a matemática e a química. Pode-se também adentrar na área dos poluentes realizando estudos sobre a dispersão destes.

Frequentemente para resolver equações derivadas de problemas em situações reais, é necessário usar métodos numéricos, mas é útil examinar primeiramente as possíveis soluções analíticas para obter um quadro conhecido e uma possibilidade de teste de soluções. Portanto, as soluções analíticas são úteis para uma variedade de aplicações, tais como: o fornecimento de análises aproximadas de cenários alternativos; a realização de análises de sensibilidade para investigar os efeitos de vários parâmetros ou processos envolvidos; a extrapolação dos dados, onde as soluções numéricas podem ser impraticáveis, servindo como soluções de referência; e para validar soluções numéricas (Dugowson,1994).

Neste contexto, o interesse da modelagem fracionária cresce, tendo em vista que esta apresenta um maior leque de possibilidades na interpretação de suas soluções.

Considera-se como a primeira aplicação do cálculo fracionário a solução do problema da Curva Tautocrônica (curva em que o tempo gasto por uma partícula para deslizar sem atrito com gravidade constante, até seu ponto de mínimo, é independente da sua posição inicial), proposto por Abel (1823).

Muitos trabalhos recentes estão sendo escritos sobre a modelagem fracionária. Pode-se citar uma série de trabalhos que representam este turbilhão atual do tema. Além dos trabalhos citados anteriormente, existem novas definições das derivadas fracionárias, como em Morales-Delgado (2018), que aplica as derivadas fracionárias conformáveis em circuitos elétricos, e Kaplan (2018) que resolve a equação de ondas longas usando equações fracionárias.

Atualmente, avanços na modelagem matemática têm importantes contribuições dadas pelo cálculo fracionário, que é conhecido como a generalização do cálculo diferencial e integral (Debnath et al., 2003). A história mostra que o cálculo fracionário nasceu de questionamentos trocados entre L'Hôpital e Leibniz, em 1695, a respeito das derivadas de ordem não inteiras (Oldham and Spanier, 1974). Leibniz, formulou um questionamento sobre a possibilidade de uma generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária. Em resposta, L'Hôpital questionou quanto ao caso de uma derivada de ordem meio e, Leibniz, apresentou um resultado que pareceu ser o começo de algo interessante (Abel, 1823; Oldham and Spanier, 1974). No entanto, mesmo com importantes avanços dessa abordagem no decorrer das décadas, somente três séculos depois, em 1974, o tema foi colocado em discussão na primeira conferência internacional sobre cálculo fracionário e suas aplicações às ciências (Ross, 1974). Assim, este tema representa o estado da arte em modelagem matemática e carece de um maior aprofundamento em aplicações práticas do mundo real, embora surjam as dificuldades inerentes das derivadas fracionárias de não obedecerem as regras tradicionais do cálculo de ordem inteira (Wazwaz, 2002) e também a questão da dimensionalidade das equações (Garcia et al., 2013; Ebaid et al., 2017).

A modelagem matemática sempre tem sido tema de interesse nas mais diversas áreas do conhecimento, onde grandes avanços foram realizados nas soluções numéricas de equações diferenciais (Muñoz-Ruiz et al., 2021). No entanto, as soluções analíticas representam importante parcela de interesse entre os pesquisadores, em particular, devido aos seus resultados

exatos que podem servir como parâmetro de suporte aos modelos numéricos (Bueler et al., 2005). Porém, a utilização do cálculo fracionário em aplicações práticas ainda é um desafio, principalmente devido ao fato de não obedecer grande parte das bem conhecidas regras básicas do cálculo de ordem inteira (Wazwaz, 2002).

Na modelagem dos problemas de geociências, frequentemente o resultado final é uma equação diferencial. Em particular, nos métodos eletromagnéticos, a investigação é relativa a campos magnéticos e potenciais elétricos, onde estas equações surgem das equações de Maxwell. As equações resultantes podem ser incrementadas, levando a uma interpretação mais real do fenômeno, fazendo-se a modelagem matemática do meio e de suas propriedades.

Sripanya, W. (2011), estudou problemas de geofísica através do campo magnético e o potencial elétrico, resolvendo equações diferenciais, considerando o meio formado por camadas, cujas condutividades dependiam da profundidade na forma de variação exponencial ou binomial. Sripanya, W. (2011), contemplou somente a modelagem de ordem inteira da equação diferencial. Mais recentemente em Chaladgarn, T., and Yooyuanyong, S. (2013), foi deduzida a solução para o campo magnético azimutal, utilizando uma equação diferencial, para um modelo de duas camadas, em que a condutividade da primeira camada apresenta uma dependência exponencial com  $z$ . Em ambos os casos, os problemas resultavam em equações diferenciais de solução não trivial, e somente a modelagem de ordem inteira na equação diferencial foi descrita.

Dentre outras aplicações das derivadas fracionárias, existem as seguintes utilizações: fenômenos de difusão, epidemiologia, vibrações mecânicas, entre outras. Recentemente, Goulart et al (2017), propôs um modelo de equações diferenciais fracionárias simples para a distribuição espacial de estado estacionário de concentração de um poluente não-reativo em problemas atmosféricos. Os autores resolveram estes modelos e compararam as soluções com um experimento real. Os resultados mostraram que os modelos fracionários apresentam um melhor

desempenho que o modelo Gaussiano e ainda melhor que os modelos encontrados na literatura. Outro interessante trabalho, escrito por Zhou et al (2018), propõe uma representação alternativa da equação de difusão para melhorar a modelagem de difusão anômala. Os resultados deste trabalho se mostraram também melhores que os da literatura.

Neste trabalho, propõe-se aplicar a modelagem fracionária em fenômenos de geociências, campo este ainda aberto, no que diz respeito as equações fracionárias. Segundo Camargo (2009) esta modelagem traz uma interpretação mais próxima da realidade do fenômeno. Neste trabalho será feito uma fundamentação matemática necessária para o perfeito entendimento da sequência do texto, com uma explanação sobre o Método da decomposição de Laplace (LDM), além de expor definições sobre a derivada fracionária, com caputo e conformáveis. Ainda é descrita a função de Mittag Leffler, que desempenha um importante papel no cálculo fracionário. Na sequência as soluções analíticas de equações utilizadas em problemas geofísicos serão obtidas pela primeira vez utilizando o LDM. O LDM é essencialmente uma combinação da transformada de Laplace e o método de decomposição Adomian. O LDM é uma das técnicas analíticas eficientes para resolver equações lineares e não lineares. Ao contrário de outras técnicas analíticas, o LDM não exigem discretização e linearização. A modelagem fracionária também é aplicada a equação diferencial da onda eletromagnética plana, sendo resolvida com o mesmo método. Depois, uma variação do parâmetro fracionário é aplicada na solução, mostrando a compatibilidade dos valores fracionários com as soluções das equações em meios materiais. Apesar da grande variedade de métodos numéricos e analíticos para obtenção de soluções de equações diferenciais, em termos físicos, as equações de ordem inteira não explicam completamente a difusão anômala, que surge naturalmente devido ao fato de os parâmetros do sistema geralmente crescerem mais rapidamente que os das soluções obtidas por modelos clássicos (West, 2014). Desta forma, a difusão anômala e outros processos de transporte com ênfase em ambientes hidrológicos e porosos tem utilizado o cálculo fracionário

como uma ferramenta promissora (Zaslavsky, 1994; Wazwaz, 2002; Debnath, 2003; Meerschaert and Tadjeran, 2004; Gorenflo and Mainardi, 2009; Schumer, 2009; Podlubny et al., 2017). Sendo assim equação de difusão-advecção fracionária 3D (estado estacionário) é resolvida analiticamente, comparando-se a solução obtida com o uso da definição de derivada fracionária de Caputo e a obtida com a aplicação da derivada conformável (Khalil et al., 2014), para diferentes valores do parâmetro fracionário e da constante de dimensionalidade. Estas aplicações desenvolvidas no decorrer dos capítulos, estão associadas a discussões práticas da modelagem fracionária. Nestas aplicações várias abordagens meramente matemáticas, são colocadas em situações reais.

## **1.1 Definição do problema**

A busca de soluções analíticas para problemas de geociências é um dos temas de pesquisa mais importantes no campo da modelagem matemática. Embora a modelagem usando equações diferenciais de ordem inteira para problemas de geociências seja um caso particular em relação a fracionária, os desfechos com soluções analíticas encontradas na literatura são poucos considerando-se coeficientes variáveis. Desta forma, neste trabalho será mostrado que a modelagem fracionária descreve melhor os problemas de geociências tendo em vista que considera um parâmetro fracionário nas soluções das equações. Além disto, a metodologia utilizada nesta pesquisa pode ser usada para resolver equações diferenciais não lineares e fracionárias, sendo, portanto, uma maneira mais geral. As equações modeladas e resolvidas nesta pesquisa foram: i) equação diferencial oriunda do método geofísico MMR; ii) equação da onda, que possui uma vasta aplicação nos métodos geofísicos; iii) equação de difusão-advecção em problemas de dispersão atmosférica.

## **1.2 Objetivo(s)**

### **1.2.1 Geral**

Obter novas soluções analíticas e semi-analíticas, para equações provenientes de problemas de geociências, usando a modelagem fracionária e utilizando os métodos LDM, Derivadas fracionárias segundo Caputo e derivadas conformáveis.

### **1.2.2 Específicos**

- a) Propor novos modelos matemáticos, modificando equações oriundas de problemas em geociências, com o uso das derivadas fracionárias;
- b) Obter a solução da equação oriunda do método geofísico MMR, usando a derivada fracionária de Caputo;
- c) Obter a solução da equação da onda eletromagnética, usando a derivada fracionária de Caputo e correlacionar o expoente fracionário com parâmetros do meio;
- d) Obter a solução da equação de difusão-advecção fracionária tridimensional, usando a derivada fracionária de Caputo e as derivadas conformáveis, realizando uma comparação entre elas e fazer uma correção dimensional;
- e) Obter uma solução semi-analítica da equação de difusão-advecção fracionária transiente bidimensional, usando a derivada fracionária de Caputo e as derivadas conformáveis.
- f) Comparar os resultados da solução da equação de difusão-advecção fracionária tridimensional, com dados experimentais da literatura.

## **1.3 Hipótese**

A modelagem de ordem fracionária representa melhor os fenômenos de geociências que a modelagem de ordem inteira.

## 1.4 Aspectos metodológicos

As equações diferenciais de ordem inteira são amplamente utilizadas para modelar problemas em geociências, mas a ordem não inteira é considerada uma generalização da equação tradicional. Para obter a solução analítica de uma equação diferencial fracionária, existem atualmente duas alternativas básicas:

a) Usar uma definição da derivada fracionária, a mais conhecida sendo a de Caputo ou b) usar a definição da derivada conformável, Khalil et al. (2014) que converte a derivada fracionária em uma derivada de ordem inteira.

No primeiro momento, o método LDM foi usado junto com a derivada de Caputo. Este método é um algoritmo numérico baseado na técnica da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares. O método é muito adequado para problemas físicos, pois não requer linearização desnecessária, perturbação ou outros métodos restritivos ou suposições que às vezes podem distanciar significativamente a modelagem do problema analisado.

Na sequência, a derivada de Caputo e o LDM continuou sendo usado, sendo que uma correlação entre o expoente da derivada fracionária e os parâmetros do meio foram investigados. No decorrer do trabalho a derivada conformável foi utilizada, sendo comparada com a derivada de Caputo. Também uma correção na dimensão foi realizada, pois ao aplicar-se a derivada fracionária numa equação diferencial, perde-se a dimensão do problema.

## 1.5 Organização da Tese

Este documento consiste em cinco capítulos e está estruturado da seguinte forma:

**Capítulo 1** - Introdução: Apresenta a motivação e objetivos do trabalho;

**Capítulo 2** – Histórico e estado da arte: Oferece um panorama bibliográfico do trabalho realizado na área tratada;

**Capítulo 3** – Fundamentação Teórica: apresenta os conceitos de derivadas fracionárias, a descrição do método LDM e soluções para as equações fracionárias do método geofísico MMR, para a equação da onda eletromagnética, para a equação de difusão-advecção 3D e para a solução semmi-analítica da equação de difusão-advecção 2D;

**Capítulo 4** - Resultados numéricos: mostra os resultados das simulações e comparações, e para o caso específico da equação de difusão-advecção é considerada as soluções com a derivação de Caputo e Conformável;

**Capítulo 5** – Conclusões: Neste capítulo são discutidas as conclusões sobre as análises dos resultados obtidos.

## Capítulo 2

### 2.1 Histórico e revisão bibliográfica

Datada em 30 de setembro de 1695, a carta de Leibniz endereçada para L'Hôpital foi o marco do nascimento do cálculo fracionário. Ele foi introduzido em um dos primeiros artigos de Abel (1823), onde os seguintes elementos puderam ser encontrados: a ideia de integração e diferenciação de ordem fracionária; a relação mutuamente inversa entre eles; o entendimento de que a diferenciação e integração de ordem fracionária podem ser considerada como a mesma operação generalizada; e até mesmo a notação unificada para diferenciação e integração de ordem real arbitrária.

Então, como já mencionado, a partir de 1695, com a carta de Leibniz, se inicia a história do cálculo fracionário, também conhecido como cálculo de ordem arbitrária. A partir de um questionamento de L'Hôpital sobre a interpretação da notação descrita por Leibniz para uma derivada de ordem meio, foram feitos os primeiros registros do cálculo fracionário. Na tentativa de justificar as afirmações de Leibniz, muitos cientistas contribuíram para o estudo dessa nova vertente do cálculo.

Durante o século XVIII, Euler estava atento ao desenrolar do cálculo fracionário e, por isso, deu contribuições muito importantes. A partir do século XIX, alguns outros cientistas, como Laplace, Euler, Lagrange, Lacroix e Fourier deram também suas contribuições para o cálculo fracionário.

Ainda assim, apesar de toda a dedicação e contribuição desses cientistas, o cálculo fracionário, também conhecido como CF, não possuía uma aplicação. Foi apenas em 1823 que Abel (1823) realizou a primeira operação utilizando o cálculo fracionário. Ele estava estudando o problema da tautocronia, quando obteve como solução uma equação integral. Abel baseou

sua solução na afirmação de que a derivada fracionária de uma função constante seria sempre igual a zero (como havia sido estudado por Lacroix anteriormente).

A partir daí, Liouville foi atraído pelo trabalho de Abel e começou a trabalhar em estudos para criar uma definição lógica de uma derivada fracionária, focando na expansão de funções em séries de potência. Por fim, foi definida a primeira fórmula de Liouville para uma derivada de ordem arbitrária.

Contudo, logo se notou algumas restrições na fórmula criada por Liouville, o que o impulsionou a criar outra definição para a derivada fracionária, desta vez baseada na função gama.

Neste estágio, já existiam duas formulações distintas da derivada: uma delas garantia que a derivada de uma constante seria nula e a outra afirmava que não. Augustus De Morgan, em 1840, fez um estudo dos dois casos e apontou que as duas formulações poderiam fazer parte de um sistema mais geral. E, em 1847, Georg Riemann escreveu um artigo, que só veio a ser publicado após sua morte em 1866 (Camargo, 2009). Nele, foi apresentada uma definição para derivada fracionária, que posteriormente veio a se tornar ineficiente e extremamente complexa.

A partir de 1860, começaram os estudos de integrais e diferenciais fracionárias. Em 1884, (Camargo, 2009) Letnikov publicou um trabalho sobre operadores (integrais e diferenciais) de forma generalizada, marcando, assim, o cálculo fracionário moderno.

Neste período, o cálculo de ordem arbitrária tornou-se um campo da análise matemática que lida com equações integrodiferenciais. Diversos autores contribuíram para esse período de estudos do cálculo fracionário, mas foi Heaviside que fez as publicações mais relevantes (Dugowson, 1994) introduzindo o uso prático de operadores diferenciais fracionários na análise de linhas de transmissão elétrica por volta de 1890. Ele mostrou, em alguns de seus artigos, que certas equações diferenciais lineares poderiam ser resolvidas através de operadores

generalizados, o que se revelou muito útil para engenheiros que trabalhavam com teoria de transmissão de corrente.

Durante o século XX, os resultados escritos por Heaviside ainda eram destaque, mas sem justificativa matemática efetiva. Em 1919, Bromwich foi o primeiro a justificar os resultados, encorajando a utilização dos métodos operacionais para solucionar problemas físicos.

Em 1936, Harold T. Davis explicou a teoria de operadores lineares no cálculo fracionário e suas aplicações. Pouco antes da década de setenta, o cálculo fracionário já era muito estudado, mas não possuía muita credibilidade por conta, dentre outras razões, da existência de diversas definições, não equivalentes, para a derivada fracionária.

Foi na década de 1980 que a atividade relacionada ao cálculo fracionário foi intensificada pelo mundo. Naquela década, ocorreu a Segunda Conferência Internacional sobre Cálculo Fracionário, em Glasgow, na Escócia em 1989 (Ross, 1997). A teoria e as aplicações do cálculo fracionário se expandiram muito ao longo dos séculos XIX e XX, e numerosos contribuintes deram definições para derivadas fracionárias e integrais (Valério, 2014) .

Segundo Camargo (2009) no Brasil, o primeiro pesquisador a mencionar o cálculo fracionário foi Ricieri, em 1993, mas isso mudou a partir de 2005 um grupo de físicos deram continuidade aos estudos e realizaram publicações relacionadas ao tema. Foi a partir daí que o primeiro estudo envolvendo a função Mittag-Leffler foi publicado em Campinas: uma tese de Doutorado publicada em 2009 (Camargo 2009), onde se utilizou métodos de cálculo e discutiu-se sobre uma função de Green fracionária.

Desde então, o Brasil tem publicado diversos artigos e estudos correlatos. Para a geociências muitos avanços e alternativas de soluções das equações diferenciais resultante dos problemas, foram discutidas. Existe uma vasta literatura sobre as soluções e métodos aplicados a estes problemas. Para ilustração podem ser citados os trabalhos Stoyer and Wait, (1977), Banerjee et al.(1980a, 1980b), Raghuwanshi and Singh (1986), Kim and Lee (1996), Sato (2000), Chock,

Sun & Winkler (1996), Sharan, Kansa & Gupta (1997), Zienkiewicz & Taylor (2000), Huebner et al. (2001), Rizza et al. (2003). No entanto, todas essas soluções analíticas são obtidas para derivadas de ordem inteira com várias restrições, para tornar possível as soluções. Logicamente, deve-se usar um método numérico para situações mais complexas, que resolve numericamente as equações da geociências por meio de diferenças finitas ou volumes finitos, por exemplo. No entanto, é enfatizado aqui que a importância das soluções analíticas reside no fato de que este tipo de solução permite um melhor entendimento do fenômeno físico já que a solução é escrita de forma fechada, explicitando a dependência de todos os parâmetros físicos. Desta forma, é possível estudar a influência desses parâmetros na solução e também realizar uma análise de sensibilidade da solução, incluindo o teste de um modelo numérico.

As ideias da derivada fracionária, em geociências, começaram na equação difusão-advecção em problemas de propagação de poluentes atmosféricos com Goulart et al. (2017). Apesar da ideia inovadora, o trabalho apresentou uma solução para a equação considerando coeficientes constantes utilizando o método de separação de variáveis. Recentemente surgiram os trabalhos de Moreira & Moret (2018), Acioli, Xavier & Moreira (2019), Moreira & Santos (2019) e Palmeira, Xavier & Moreira (2019). O trabalho de Moreira & Moret (2018) propôs um método utilizando o GILTT modificado para resolver o problema transformado com uma derivada fracionária no termo advectivo. O trabalho de Acioli, Xavier & Moreira (2019) mostrou uma solução usando o método LDM e o método de perturbação de homotopia Adomian (1994), He (1999), Ghorbani (2008), mas apenas usado para coeficientes constantes. O trabalho de Palmeira, Xavier & Moreira (2019) mostra uma nova equação fracionária de advecção-difusão que regula a formação de um poluente secundário (dióxido de enxofre em sulfato) e considera os processos de remoção do poluente da atmosfera. A equação é resolvida com uma técnica de transformação de Laplace levando em consideração um PLC verticalmente não homogêneo de acordo com o método de ADMM Moreira & Vilhena (2009).

Assim, este trabalho permitirá estudar os problemas de geociências usando uma nova modelagem matemática, a modelagem fracionária, que é um avanço significativo, pois é uma generalização da modelagem inteira. É digno de nota que este novo método para resolver problemas com equações diferenciais lineares e não lineares pode ser usado em vários campos da ciência, em particular com aplicação direta em geociências.

# Capítulo 3

## 3. Fundamentação teórica

### 3.1 Método da decomposição de Laplace (LDM)

Em Hussain et al (2010) tem-se o exemplo da equação (1) a seguir. Esta é uma equação diferencial parcial, não linear, não homogênea e de segunda ordem.

$$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = h(x,t) \quad (1)$$

onde  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ,  $R$  é o operador linear,  $N$  é o operador não linear e  $h(x,t)$  é o termo fonte, com as

seguintes condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad (2)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os membros e utilizando suas propriedades, temos:

$$s^2 \mathcal{L}[u(x,t)] - sf(x) - g(x) + \mathcal{L}[Ru(x,t)] + \mathcal{L}[Nu(x,t)] = \mathcal{L}[h(x,t)] \quad (3)$$

$$s^2 \mathcal{L}[u(x,t)] = sf(x) + g(x) - \mathcal{L}[Ru(x,t)] - \mathcal{L}[Nu(x,t)] + \mathcal{L}[h(x,t)] \quad (4)$$

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x,t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x,t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x,t)] \quad (5)$$

Logo, seguindo o método, o passo seguinte seria escrever a solução como a sequência:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (6)$$

Para isso, o operador não linear:

$$Nu(x, t) \quad (7)$$

Pode ser decomposto por:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (8)$$

Onde  $A_n$  são os polinômios de Adomian, que podem ser calculados como:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Substituindo (6) e (8) em (5), temos:

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [h(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} [u_n(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [h(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (11)$$

Ao comparar os lados da equação, tem-se:

$$\mathcal{L}[u_0(x,t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x,t)] = K(x,s) \quad (12)$$

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(x,t)] = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x,t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n], n \geq 1 \quad (13)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, tem-se:

$$u_0(x,t) = K(x,t) \quad (14)$$

$$u_{n+1}(x,t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru_n(x,t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n] \right], n \geq 0 \quad (15)$$

A modificação no método é feita assumindo:

$$K(x,t) = K_0(x,t) + K_1(x,t) \quad (16)$$

de forma que,

$$u_0(x,t) = K_0(x,t) \quad (17)$$

e,

$$u_1(x,t) = K_1(x,t) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru_0(x,t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_0] \right] \quad (18)$$

O segundo termo à direita, na equação (18), é considerado somente no termo  $u_1(x,t)$ .

Recursivamente, pode-se escrever os demais termos da série na seguinte forma:

$$u_{n+1}(x,t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru_n(x,t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n] \right], \quad n \geq 1 \quad (19)$$

Observa-se que a modificação do método está no termo  $u_0(x,t)$ , onde é considerado apenas o primeiro termo referente a  $K(x,t)$ . Esta pequena modificação é fundamental para a rápida convergência da série e a eliminação do ruído segundo Hussain et al (2010). Obviamente, a solução obtida com esta metodologia é altamente dependente da escolha de  $K_0(x,t)$  e  $K_1(x,t)$ .

### 3.2 Derivadas Fracionárias

A derivada fracionária de Caputo de ordem  $\alpha$  é definida por:

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \quad (20)$$

onde  $f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}$  é uma derivada comum de ordem inteira  $n$  e  $\Gamma(\cdot)$  representa a função

Gamma. Uma consequência das definições (20) é que a derivada fracionária Caputo é um operador não local (devido a integral). É importante notar, que enquanto a derivada Riemann-Liouville de uma constante não é zero, a derivada Caputo de uma constante é zero, para todos  $\alpha > 0$ . A definição Caputo assume que a função  $f$  é diferenciável.

A transformada de Laplace ( $\mathcal{L}$ ) de uma derivada fracionária dada pela fórmula de Caputo é,

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad , \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (21)$$

onde  $s$  é a variável transformada. Portanto, no caso deste trabalho,

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (22)$$

Além disto, apresenta-se a transformada de Laplace para uma função do tipo  $x^\alpha$  e a sua transformada inversa ( $\mathcal{L}^{-1}$ ):

$$\mathcal{L}[x^{m\alpha}] = \frac{\Gamma(m\alpha + 1)}{s^{m\alpha+1}} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{m\alpha+1}}\right] = \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha + 1)} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Para mais detalhes, veja o trabalho de Podlubny (1999).

No trabalho de Khalil et al. (2014), foi proposta uma nova formulação para a derivada “fracionária” que, a princípio, parece ser uma extensão natural das derivadas usuais e apresenta como vantagem atender as propriedades tradicionais do cálculo tradicional.

Adota-se a notação  $T_\alpha$  para o operador denominado derivada de uma função  $f$  com ordem  $\alpha$  ( $\alpha \in (0,1)$ ), escrita como:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (24)$$

onde, se  $f$  é diferenciável tem-se:

$$T_{\alpha}[f(t)] = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (25)$$

A derivada aqui apresentada, para  $0 < \alpha < 1$ , é local por natureza. Observa-se prontamente que se  $\alpha = 1$ , as Eqs. (20) e (25) retornam para a derivada de ordem inteira tradicional.

### 3.3 Função Gamma

Em matemática, a função gama (representada por  $\Gamma$ , a letra maiúscula gamma do alfabeto grego) é uma extensão comumente usada da função fatorial para números complexos. A função gama é definida para todos os números complexos, exceto os números inteiros não-positivos. Para qualquer número inteiro positivo,  $n$ ,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (26)$$

### 3.4 Função de Mittag-Leffler

A função Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial, introduzida pela primeira vez como uma função de um parâmetro pela série:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m\alpha + 1)} \quad , \quad \alpha > 0 \quad (27)$$

Se  $\alpha = 1$ ,

$$E_1(z) = e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \quad (28)$$

onde  $e$  representa a tradicional função exponencial.

### 3.5 Inversão numérica da transformada de Laplace

Seja  $f(t)$  uma função integrável definida para todo número real  $t > 0$ . A transformada de Laplace de  $f(t)$  é a função  $F(s)$  definida pela integral imprópria

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (29)$$

em que  $s \in \mathbb{C}$  é a variável no domínio de Laplace. A transformada inversa de Laplace denotada por  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  A Transformada de Laplace e sua inversa têm algumas propriedades que as fazem útil para analisar sistemas dinâmicos lineares e não lineares.

A integral da transformada inversa de Laplace, é dada pela integral de linha

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{a-iT}^{a+iT} F(s)e^{ts} ds, \quad (30)$$

### 3.6 Algoritmo Fixed Talbot

Em 1979, Talbot foi pioneiro nas técnicas para a inversão numérica da transformada de Laplace, propondo uma mudança do caminho integração padrão  $B = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) = a\}$  na integral dada por (30). A possibilidade desta mudança, garantindo que a transformação é analítica na região do plano complexo à direita do caminho B.

Portanto, pelo teorema de Cauchy, o contorno deformado é válido. A brilhante contribuição de Talbot é a cuidadosa escolha do caminho:

$$s(\theta) = r\theta(\cot \theta + i), \quad -\pi < \theta < \pi \quad (31)$$

Onde  $r$  é um parâmetro real.

Considere  $F(s) = 1/s^\alpha$  com  $\alpha > 0$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \exp\{t(s - \beta \log s)\} ds, \quad (32)$$

em que  $\beta = \alpha/t$ . Esta integral é de difícil resolução, pode-se contornar este problema da seguinte forma:

$$\text{Im}(s - \beta \log s) = 0. \quad (33)$$

Seja  $s = x + iy$ . Em seguida, de (33) obtém-se a equação do caminho:

$$x = y \cot \frac{y}{\beta} \quad (34)$$

Assim de (30) e (31), temos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ts(\theta)) F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta \quad (35)$$

Onde:  $s'(\theta) = ir(1 + \sigma(\theta))$  onde  $\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot \theta - 1) \cot \theta$ . Logo,

$$f(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \text{Re} \left[ \exp(ts(\theta)) F(s(\theta)) (1 + i\sigma(\theta)) \right] d\theta \quad (36)$$

Em (36), utiliza-se a regra dos trapézios com o tamanho de passo  $\frac{\pi}{M}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , e  $\theta_k = \frac{k\pi}{M}$ ,

$k = 0, \dots, M$ , Daí:

$$f_{FT}(t) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} F(r) \exp(rt) + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} \left[ \exp(ts(\theta_k)) F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k)) \right] \right\} \quad (37)$$

Com base em experimentos, o parâmetro  $r$  é dado por  $r = \frac{2M}{5t}$ . Assim,  $f_{FT}(t)$ , é o algoritmo

Talbot Fixo, dado por (37) possui somente um parâmetro livre,  $M$  que será o número de termos do somatório.

### 3.7 Aplicação da derivada fracionária no método da resistividade magnetométrica (MMR)

#### 3.7.1 O método MMR

Aplicado à exploração mineral, minérios disseminados ricos em esfarelita são geralmente alvos pobres para os métodos eletromagnéticos e o da eletrorresistividade. Em contraste, o método MMR é mais apropriado pois pode responder a alvos bons ou mal condutores elétricos em rochas encaixantes condutoras. O campo magnético medido no método MMR é representativo das correntes elétricas canalizadas através das zonas mineralizadas, sendo função da geometria de aquisição e do contraste de resistividade. Além disso, o método é sensível às variações da densidade de corrente elétrica e não aos valores absolutos da condutividade. Conseqüentemente, opera bem para estruturas alongadas na mesma direção que os eletrodos, tem uma grande área de investigação em torno no poço. Outra característica

interessante é que o campo magnético vertical resultante da distribuição da corrente elétrica na terra depende somente dos contrastes laterais de resistividade. Esse componente vertical é nulo em modelos homogêneos ou horizontalmente estratificados.

Pode-se extrair as equações diferenciais que explicam os métodos da geofísica, das equações de Maxwell. No caso da fonte pontual de corrente, pode-se citar o método da resistividade magnetométrica (MMR) como sendo um bom exemplo para ilustrar o problema.

No método da resistividade magnetométrica, como em Edwards (1974), Edwards et al (1976 e Edwards (1978), obtém-se a resistividade aparente com base nos valores da componente azimutal do campo magnético, que dependem: (i) do local da medição, (ii) das intensidades das correntes elétricas injetadas através de eletrodos instalados no meio e (iii) dos parâmetros físicos e geométricos desse meio. Edwards (1988) descreve uma variação do método MMR, onde uma fonte de corrente situada na superfície do mar injeta corrente e são realizadas medidas da componente azimutal do campo magnético.

Estes registros são adquiridos por meio de sensores localizados no topo e na base da lâmina d'água, à mesma distância horizontal da fonte. A partir daí, os dados coletados podem ser utilizados para se obter a resistividade de camadas mais abaixo.

A intensidade da componente azimutal do campo magnético  $H$  dentro de poços depende da variação vertical  $z$ , da condutividade elétrica  $\sigma$  e da localização da fonte de corrente ( $r$  componente radial), considerando-se que a terra é composta de camadas horizontais homogêneas e isotrópicas. O problema, segundo Chen et al (2004), satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = 0 \quad (38)$$

A equação (38) foi resolvida em Chen et al (2004), Sripanya (2011) e Chaladgarn (2013),

com a utilização de outras metodologias, porém sem a introdução da modelagem fracionária. Neste trabalho, será considerado a geometria do problema contendo dois semi-espacos separados pelo plano  $z = 0$  (superfície). O primeiro semi-espaco é o ar ( $z < 0$ ) com resistividade infinita, e o segundo ( $z > 0$ ). No segundo semi-espaco, a resistividade pode assumir duas situações distintas: i) constante e ii) dependente da variável  $z$ . A fonte de corrente será colocada no plano  $z = 0$ . As soluções da Eq. (38) no segundo semi-espaco serão obtidas para a resistividade constante e dependente da variável  $z$ .

Apesar da equação (38) ser bem conhecida na literatura, esta é a primeira vez que será obtida uma solução da mesma usando o método LDM e derivadas fracionárias. Neste caso espera-se que tenhamos uma modelagem com uma maior possibilidade de ajuste através do parâmetro fracionário.

### 3.7.2 O caso da resistividade constante

Com a resistividade tomada como constante, a equação (38) é expressa em:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = 0 \quad (39)$$

onde  $r > 0$  e  $z > 0$ .

Como mostrado em Stefanescu (1929), a componente azimutal do campo magnético na superfície pode ser escrita como:

$$H(r, 0) = \frac{I}{4\pi r} \quad (40)$$

e sua derivada em relação à distância radial  $r$  pode ser dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial z}(r,0) = -\frac{I}{4\pi r^2} \quad (41)$$

Logo, as equações (40) e (41) serão utilizadas como as condições de contorno do problema dado pela equação (39). Sendo assim, usando a metodologia LDM, aplica-se a transformada de Laplace em  $z$ :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{H}{r^2}\right] = \mathcal{L}[0] \quad (42)$$

resultando,

$$s^2 \widehat{H}(r,s) = sH(r,0) + \frac{\partial}{\partial z} H(r,0) - \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2}\right] \quad (43)$$

dividindo-se por  $s^2$ , obtém-se:

$$\widehat{H}(r,s) = \frac{1}{s} H(r,0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial z} H(r,0) - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2}\right] \quad (44)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa:

$$H(r,z) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{zI}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2}\right]\right] \quad (45)$$

onde o termo proveniente das condições de contorno pode ser escrito como:

$$K(r, z) = K_0(r, z) + K_1(r, z) = \frac{I}{4\pi r} - \frac{zI}{4\pi r^2} \quad (46)$$

Logo, pode-se escrever os primeiros termos como:

$$H_0 = \frac{I}{4\pi r} \quad (47)$$

$$H_1 = -\frac{zI}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} - \frac{H_0}{r^2} \right] \right] \quad (48)$$

com os demais termos dados por:

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_n}{\partial r} - \frac{H_n}{r^2} \right] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

Obtendo-se como resultado final:

$$H(r, z) = \frac{I}{4\pi r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(-1/2+n)}{\sqrt{\pi} \Gamma[n]} \cdot \frac{z^{2n-1}}{r^{2n-1}} \right] \right) \quad (50)$$

Cabe salientar que, para este caso, a literatura oferece o valor exato dado pela seguinte expressão Chen et al (2004):

$$H(r, z) = \frac{I}{4\pi r} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right] \quad (51)$$

### 3.7.3 Modelagem fracionária para resistividade constante

Para fazer uma comparação entre a solução da modelagem de ordem inteira e a respectiva modelagem fracionária, considera-se a generalização fracionária da equação diferencial associada ao problema do MMR em questão. Para a utilização do cálculo fracionário, a maneira mais comum encontrada na literatura é simplesmente substituir a derivada de ordem inteira da equação diferencial, que descreve o fenômeno, por uma de ordem não inteira, resultando assim em equações diferenciais de ordem não inteira. Sendo assim, a equação (39) se transforma em:

$$\frac{{}^c \partial^\alpha H}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = 0 \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad , \quad (52)$$

onde  $C$  representa a derivada fracionária no senso de Caputo (Podlubny et al, 2017). Assim, aplicando-se a transformada de Laplace na variável  $z$ ,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{{}^c \partial^\alpha H}{\partial z^\alpha} \right] + \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right] + \mathcal{L} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] - \mathcal{L} \left[ \frac{H}{r^2} \right] = \mathcal{L}[0] \quad (53)$$

Resultando:

$$s^\alpha \hat{H}(r, s) = s^{\alpha-1} H(r, 0) + s^{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial z} H(r, 0) - \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} \right] \quad (54)$$

Dividindo-se por  $s^\alpha$ , obtém-se:

$$\hat{H}(r,s) = \frac{1}{s}H(r,0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial z} H(r,0) - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} \right] \quad (55)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa:

$$H(r,z) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{zI}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} \right] \right] \quad (56)$$

com os primeiros termos dados por:

$$H_0 = \frac{I}{4\pi r} \quad (57)$$

$$H_1 = -\frac{zI}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} - \frac{H_0}{r^2} \right] \right] \quad (58)$$

e a expressão recursiva para os demais termos:

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_n}{\partial r} - \frac{H_n}{r^2} \right] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

Resultando:

$$H = \frac{I}{4\pi r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n 2^{2n-1} \frac{\Gamma(-1/2+n)\Gamma(1/2+n)}{\pi} \frac{z^{1+(n-1)\alpha}}{r^{2n-1}\Gamma[2+(n-1)\alpha]} \right] \right), \quad (60)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama. Observa-se prontamente que, quando  $\alpha = 2$ , recai na solução dada pela equação (50) de ordem inteira.

### 3.7.4 O caso da resistividade variando com a profundidade z.

Considerando-se que a resistividade varia exponencialmente com a profundidade,

$$\rho = \alpha e^{\beta z} \quad (61)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do meio. Pode-se então concluir que a condutividade é dada por:

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta z} \quad (62)$$

Substituindo (62) na equação (38), encontra-se:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = 0 \quad (63)$$

Por simplicidade, fazendo-se  $f = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial H}{\partial z} + f = 0 \quad (64)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (64), resulta:

$$s^2\tilde{H}(r,s) - sH(r,0) - \frac{\partial H}{\partial z}(r,0) + \beta s\tilde{H}(r,s) - \beta H(r,0) + \mathcal{L}[f] = 0 \quad (65)$$

Rearranjando os termos:

$$s(s+\beta)\tilde{H}(r,s) = sH(r,0) + \frac{\partial H}{\partial z}(r,0) + \beta H(r,0) - \mathcal{L}[f] \quad (66)$$

Obtém-se:

$$\tilde{H}(r,s) = \frac{1}{s+\beta}H(r,0) + \frac{1}{s(s+\beta)}\frac{\partial H}{\partial z}(r,0) + \frac{\beta}{s(s+\beta)}H(r,0) - \frac{1}{s(s+\beta)}\mathcal{L}[f] \quad (67)$$

Então, aplicando-se a transformada inversa, e usando as condições (40) e (41), tem-se:

$$H(r,z) = \frac{I}{4\pi r} - \left(\frac{1-e^{-\beta z}}{\beta}\right)\frac{I}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\beta)}\mathcal{L}[f]\right] \quad (68)$$

Pode-se observar que  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1-e^{-\beta z}}{\beta}\right) = z$  e  $\frac{1}{s(s+\beta)} = \frac{1}{s^2}$ , o que reduz a equação (68) na equação

(45), situação em que a resistividade é constante. Os termos da série são dados por:

$$H_0 = \frac{I}{4\pi r} \quad (69)$$

$$H_1 = -\left(\frac{1-e^{-\beta z}}{\beta}\right)\frac{I}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\beta)}\mathcal{L}[f_0]\right] \quad (70)$$

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\beta)}\mathcal{L}[f_n]\right] \quad (71)$$

Como feito anteriormente, para a equação fracionária basta trocar a derivada de ordem inteira da equação diferencial, que descreve o fenômeno, por uma de ordem não inteira. Logo, a equação (63) transforma-se em:

$$\frac{{}^c \partial^{\alpha+1} H}{\partial z^{\alpha+1}} + \beta \frac{{}^c \partial^\alpha H}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = 0 \quad , \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (72)$$

Fazendo  $f = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H$ , tem-se:

$$\frac{{}^c \partial^{\alpha+1} H}{\partial z^{\alpha+1}} + \beta \frac{{}^c \partial^\alpha H}{\partial z^\alpha} + f = 0 \quad (73)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação (73), na variável  $z$ , resulta:

$$s^{\alpha+1} \widehat{H}(r, s) - s^\alpha H(r, 0) - s^{\alpha-1} \frac{\partial H}{\partial z}(r, 0) + \beta s^\alpha \widehat{H}(r, s) - \beta s^{\alpha-1} H(r, 0) + \mathcal{L}[f] = 0 \quad (74)$$

Assim:

$$s^\alpha (s + \beta) \widehat{H}(r, s) = (s^\alpha + \beta s^{\alpha-1}) H(r, 0) + s^{\alpha-1} \frac{\partial H}{\partial z}(r, 0) - \mathcal{L}[f] \quad (75)$$

Rearranjando os termos:

$$\widehat{H}(r, s) = \frac{1}{s} H(r, 0) + \frac{1}{s(s + \beta)} \frac{\partial H}{\partial z}(r, 0) - \frac{1}{s^\alpha (s + \beta)} \mathcal{L}[f] \quad (76)$$

Aplicando-se a transformada inversa, tem-se:

$$H(r, z) = \frac{I}{4\pi r} - \frac{I}{4\pi r^2} \left( \frac{1 - e^{-\beta z}}{\beta} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha (s + \beta)} \mathcal{L}[f] \right] \quad (77)$$

Onde

$$H_0 = \frac{I}{4\pi r} \quad (78)$$

$$H_1 = -\frac{I}{4\pi r^2} \left( \frac{1 - e^{-\beta z}}{\beta} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha (s + \beta)} \mathcal{L}[f_0] \right] \quad (79)$$

e, os demais termos:

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha (s + \beta)} \mathcal{L}[f_n] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (80)$$

Fazendo-se  $b \rightarrow 0$  e  $\alpha = 1$ , estas soluções recaem nas equações (69), (70) e (71). Observa-se claramente que estas soluções de ordem fracionária são a generalização das equações de ordem inteira.

$$H(r, z) = \left\{ \frac{I}{4\pi r} - \left( \frac{1 - e^{-\beta z}}{\beta} \right) \frac{I}{4\pi r^2} + \frac{3e^{-\beta z} z^{1+\alpha} (-\beta z)^{-1-\alpha} (\alpha \Gamma(\alpha)^2 + \Gamma(\alpha) ((\alpha + \beta z) \Gamma(1 + \alpha) - \Gamma(1 + \alpha, -\beta z))) - \Gamma(1 + \alpha) (\beta z \Gamma(\alpha, -\beta z) + \Gamma(1 + \alpha, -\beta z))}{\beta \Gamma(\alpha) \Gamma(1 + \alpha)} \frac{I}{4\pi r^4} - \dots \right\} \quad (81)$$

É possível identificar que estas soluções de ordem fracionária são a generalização das de ordem inteira. As séries resultantes de Eqs. (68) e (77) apresentam alguns termos mais complicados, de modo que apenas os primeiros termos foram indicados. Este tipo de problema é ideal para computação simbólica (por exemplo, o Wolfram Mathematica).

### **3.8 Métodos Geofísicos-Eletromagnéticos**

Os métodos geofísicos eletromagnéticos são constituídos de muitas técnicas para determinar a geometria e as propriedades elétricas subterrâneas para fins de estudos geológicos.

Existem várias classificações dos sistemas elétricosmagnéticos. A mais prática é subdividi-los em dois tipos: os métodos galvânicos e os indutivos. Os primeiros, conhecidos como Métodos Elétricos, usam correntes invariantes no tempo e os segundos empregam correntes alternadas. No primeiro grupo estão os métodos da resistividade e da polarização. No segundo, denominado de Eletromagnéticos, incluem-se a , Audio-Magnetotélúrico, VLF (Very low , Turam, Slingram, TEM (Transient , GPR (Ground Penetrating Radar) e outros. As técnicas dos métodos elétricos de poços não são , incluídas na classificação dos métodos elétricos.

O fundamento teórico dos métodos eletromagnéticos pode ser resumido na identificação da simetria entre o campo gerado pelo transmissor, a forma do receptor e a estrutura do meio. A situação mais simples corresponde às ondas planas incidindo em semi-espaço infinito. Neste trabalho vamos estudar a equação de onda plana fracionária, permitindo assim, a utilização do parâmetro fracionário para um melhor ajuste da modelagem ao fenômeno em questão, além disso será feita uma comparação entre o valor do parâmetro fracionário e a atenuação do meio na amplitude da onda eletromagnética. Este estudo tem sua importância ímpar, pois retorna um modelo mais geral, para o campo elétrico da onda eletromagnética plana.

#### **3.8.1 O caso das ondas eletromagnética planas**

As ondas eletromagnéticas estão presentes em nosso cotidiano, sendo úteis em diversas áreas, tais como as teorias da medicina, geofísica, geologia, física, dentre outras. Na geofísica, por exemplo, aparecem com muita frequência nos métodos eletromagnéticos, onde são utilizados campos magnéticos, potenciais elétricos e ondas eletromagnéticas. As ondas eletromagnéticas

podem ser derivadas das equações de Maxwell, que são equações lineares no vácuo ou no interior dos átomos e dos núcleos e, considerando-se estes casos, dão origem a equações diferenciais também lineares. No entanto, as equações deduzidas são sempre resolvidas utilizando-se métodos clássicos de soluções de equações diferenciais de ordem inteira. Portanto, o objetivo deste tópico trabalho é resolver a equação diferencial de uma onda eletromagnética no vácuo, através das modelagens de ordem inteira e fracionária, resolvendo-as através do método da decomposição por Laplace (MMDL). A solução fracionária permite uma variação do valor do parâmetro fracionário, resgatando as soluções das equações das ondas eletromagnéticas que se propagam em meios materiais, possibilitando analisar os diversos tipos de amortecimento para os mais variados meios. Nesta seção será introduzida a derivada fracionária e também será realizado uma comparação do parâmetro fracionário com a atenuação do meio, trazendo assim uma abordagem mais geral na solução da equação de onda. Neste sentido mais um passo será dado na compreensão e no sentido física das derivadas fracionárias.

Em Reitz (1982), é deduzida, a partir das equações de Maxwell, a equação da onda eletromagnética para um meio linear, isotrópico e homogêneo, onde a densidade de carga é nula, quer o meio seja condutor ou não condutor.

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (82)$$

Onde:  $\sigma$  é a condutividade do meio,  $\varepsilon$  a permissividade elétrica,  $\varepsilon_0$  a permissividade elétrica no vácuo,  $\mu$  a permeabilidade magnética e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética no vácuo.

Para  $S = 0$  e no espaço vazio  $\varepsilon = \varepsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ , temos:

$$\nabla^2 E - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (83)$$

Usando a notação fasorial e considerando que  $E(\mathbf{r})$  varie apenas na direção  $z$ , temos:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_m e^{-\beta z i} \cdot e^{i\omega t} = E(z, t) \quad (84)$$

Aplicando a equação (84) em (83), temos:

$$\frac{\partial^2 (E(z) \cdot e^{i\omega t})}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 (E(z) \cdot e^{i\omega t})}{\partial t^2} = 0 \quad (85)$$

Simplificando,

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 E(z) = 0 \quad (86)$$

Como:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \text{ temos:}$$

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - \beta^2 E(z) = 0 \quad (87)$$

$$\text{Onde } b = \frac{\omega}{c} = \frac{2\rho}{l}$$

Para esta equação temos uma solução possível, que é:

$$E(z) = E_m e^{-\beta z i} \quad (88)$$

Assim temos:

$$E(0) = E_m \quad (89)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}(0) = -\beta i E_m \quad (90)$$

Aplicando o MMDL, temos:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right] + \mathcal{L}[\beta^2 E] = \mathcal{L}[0] \quad (91)$$

Obtendo-se:

$$s^2 \widehat{E}(s) - sE(0) - \frac{\partial E(0)}{\partial z} + \mathcal{L}[\beta^2 E] = 0 \quad (92)$$

e,

$$\widehat{E}(s) = \frac{1}{s} E(0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\beta^2 E] \quad (93)$$

Aplicando-se a transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[\widehat{E}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} E(0)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\beta^2 E]\right] \quad (94)$$

Resulta:

$$E(z) = E(0) + z \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\beta^2 E]\right] \quad (95)$$

e verifica-se facilmente que

$$E_0 = E_m \quad (96)$$

$$E_1 = -zi\beta E_m - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\beta^2 E_0]\right] \quad (97)$$

e os demais termos vem da equação de recursiva:

$$E_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E_n] \right] , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (98)$$

Logo, a série resultante é:

$$E_{(z)} = E_m \left( 1 - i\beta z - \frac{1}{2} \beta^2 z^2 + \frac{1}{6} i\beta^3 z^3 + \frac{1}{24} \beta^4 z^4 - \frac{1}{120} i\beta^5 z^5 - \frac{1}{720} \beta^6 z^6 + \dots \right) \quad (99)$$

No entanto, pela identidade dada pela expressão:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \quad \text{com } x = -\beta iz \quad (100)$$

resulta,

$$E_{(z)} = E_m e^{-i\beta z} \quad (101)$$

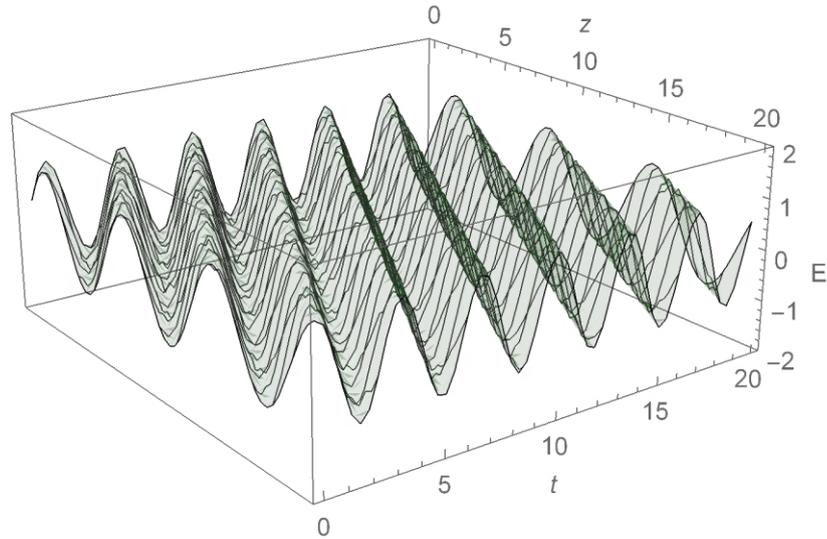
Assim inserindo o fator temporal, temos:

$$E(z, t) = E_m e^{i(\omega t - \beta z)} = E_m [\cos(\omega t - \beta z) + i \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)] \quad (102)$$

Tomando a parte real, temos:

$$E(z, t) = E_m \cos(\omega t - \beta z) \quad (103)$$

Por conveniência, adotamos  $\omega = 3.10^8 \text{ rad} / \text{s}$  e por consequência  $\beta = 1 \text{ rad} / \text{m}$ .

**Figura 1:** Onda eletromagnética no espaço vazio

*Fonte: autoria própria*

### 3.8.2 Ondas Eletromagnéticas Fracionárias

Para introduzir a modelagem fracionária será trocada a derivada de ordem inteira da equação diferencial pela ordem não inteira, resultando assim em equações diferenciais fracionárias.

Sendo assim, a equação (87) se transforma em:

$$\frac{\partial^\alpha E(z)}{\partial z^\alpha} - \beta^2 E(z) = 0, \text{ com } 1 \leq \alpha \leq 2. \quad (104)$$

Usando-se as condições iniciais do problema de ordem inteira,

$$E(0) = E_m \quad (105)$$

$$\frac{\partial E(0)}{\partial z} = -\beta^2 i E_m = 0 \quad (106)$$

Aplicando-se o MMDL, tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^\alpha E}{\partial z^\alpha}\right] - \mathcal{L}[\beta^2 E] = \mathcal{L}[0] \quad (107)$$

obtendo-se:

$$s^\alpha E(s) - s^{\alpha-1} E(0) - s^{\alpha-2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} + \mathcal{L}[\beta^2 E] = 0 \quad (108)$$

e

$$E(s) = \frac{1}{s} E(0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[\beta^2 E] \quad (109)$$

Aplicando-se a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} E(0)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[\beta^2 E]\right], \quad (110)$$

Resulta:

$$E(z) = E(0) + z \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[\beta E]\right], \quad (111)$$

e verifica-se facilmente que

$$E_0 = E_m, \quad (112)$$

$$E_1 = -zi\beta E_m - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E_0] \right], \quad (113)$$

e os demais termos vem da equação de recursiva

$$E_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E_n] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (114)$$

Logo, a série resultante é:

$$E_{(z)} = E_m \left( 1 - i\beta^2 z - \frac{\beta^2 z^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{iz\beta^4 z^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} + \frac{\beta^4 z^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{iz\beta^6 z^{2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} - \frac{\beta^6 z^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \dots \right). \quad (115)$$

Dado que

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \text{e} \quad E_{\alpha,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 2)},$$

sejam as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente (Valério et al, 2014), logo:

$$E_{(z)} = E_m [E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta iz E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)]. \quad (116)$$

Inserindo-se o fator temporal,

$$E(z) = e^{i\omega t} E_m[E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta iz E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)] \quad (117)$$

onde,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t). \quad (118)$$

Logo,

$$E(z, t) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) E_m[E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta iz E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)]. \quad (119)$$

Tomando-se a parte real, tem-se:

$$E(z, t) = E_m[\cos(\omega t) E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) + \operatorname{sen}(\omega t) E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)]. \quad (120)$$

### 3.9 Solução da equação difusão-advecção 3D, estacionária, fracionária

Neste seção, são obtidas duas soluções analíticas da equação de difusão-advecção 3D fracionária (steady state) para o estudo da dispersão de poluentes atmosféricos. Uma solução é obtida considerando-se a derivada no sentido de Caputo e a outra com a derivada conformável, sendo ambas no termo advectivo longitudinal. Para atingir o objetivo foi utilizado o método da decomposição de Laplace (LDM), o qual gera uma solução em série de rápida convergência. Os modelos mostram que as soluções obtidas não são idênticas, sendo que a proveniente da derivada de Caputo (derivada não-local) é representada pela função de Mittag-Leffler, intrínseca as derivadas fracionárias, e a proveniente da derivada conformável (derivada local)

gera uma função exponencial, sendo idênticas somente quando forem de ordem inteira ( $\alpha = 1$ ). Além disto, foram feitas análises de sensibilidade em dois parâmetros explícitos obtidos nas soluções: o parâmetro fracionário  $\alpha$ , que controla a ordem da derivada fracionária, e parâmetro  $\varphi$ , responsável pela manutenção da dimensionalidade correta das equações. As soluções via Caputo a conformável com simulações usando dados do tradicional experimento de Copenhagen com  $\varphi = 1$  m e  $\alpha = 0.98$ , apresentaram em ambas os índices estatísticos NMSE = 0.10, COR = 0.90 e FAT2 = 0.91, com pequenas diferenças em FB e FS, sendo que estes resultados são melhores do que os de alguns modelos com equações de ordem inteira mais complexos existentes na literatura. Em termos práticos, tendo em mente que os dados experimentais são moderadamente convectivos, percebe-se que as concentrações dos poluentes simuladas ao nível do solo por ambos modelos não apresentaram diferenças estatisticamente significativas em condições de baixa fracionalidade, mesmo considerando-se o parâmetro de dimensionalidade variando da unidade até a menor escala da turbulência ( $\varphi \approx 10^{-3}$  m, microescala de comprimento de Kolmogorov). No entanto, quando a fracionalidade aumenta, o parâmetro de dimensionalidade de microescala se torna mais efetiva para deteriorar rapidamente os resultados.

Nos problemas atmosféricos, o transporte de um poluente sob os efeitos combinados de difusão e advecção é descrito pela bem conhecida equação de difusão-advecção (Moreira and Vilhena, 2009). Desta forma, a poluição atmosférica tem sido sistematicamente modelada com equações diferenciais de ordem inteira, obtendo-se soluções numéricas, semi-analíticas e analíticas da equação de difusão-advecção (Moreira et al., 2005a,b; Sharan and Modari, 2006; Essa et al., 2007; Guerrero et al., 2012; Pimentel et al., 2014; Moreira et al., 2014; Albani et al., 2015). Porém, recentemente foram propostas soluções analíticas para a equação de difusão-advecção de ordem fracionária (Goulart et al., 2017; Moreira and Moret, 2018; Acioli et al., 2019; Xavier et al., 2019; Moreira et al., 2019; Palmeira et al., 2019; Moreira and dos Santos,

2019). No trabalho pioneiro de Goulart et al. (2017), foi obtida uma solução usando o método de separação de variáveis na equação de difusão-advecção 2D fracionária. O trabalho de Moreira e Moret (2018) também apresentou uma solução da equação 2D fracionária, mas com uma solução em séries usando o método GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) (Moreira et al., 2009). No artigo de Xavier et al. (2019), foi apresentada uma solução em séries da equação de difusão-advecção 2D fracionária usando o método da decomposição por Laplace (LDM) (Adomian, 1991; Adomian, 1994; Khuri, 2001; Prates and Moreira, 2020a,b), sendo o coeficiente de difusão dependente da distância longitudinal da fonte. Já no trabalho de Moreira et al. (2019), foi proposta uma solução analítica da equação de difusão-advecção 3D fracionária para simular a dispersão de poluentes na atmosfera utilizando uma combinação entre o método LDM (Laplace Decomposition Method) e a técnica GITT (Generalized Integral Transform Technique) (Cotta, 1993; Costa et al., 2006). A combinação dos métodos LDM e GITT gerou uma nova técnica para o desenvolvimento de soluções analíticas lineares e não lineares.

É importante observar que nos problemas atmosféricos anteriores todas as soluções fracionárias foram obtidas considerando-se a derivada fracionária de Caputo e constante de dimensionalidade igual a unidade. Isto se deve ao fato da derivada fracionária de Caputo levar em conta as condições iniciais na solução do problema, além da derivada de uma constante ser zero, características que a tornam mais usual em problemas práticos (Acioli et al., 2019). No entanto, Khalil et al. (2014), na tentativa de encontrar uma derivada fracionária que obedecesse a todas as regras usuais do cálculo, propôs a conhecida derivada conformável, a qual tem sido sistematicamente usada em vários trabalhos (Chung, 2015; Silva et al., 2018; Younas et al., 2021; etc). Neste sentido, existe uma discussão na literatura sobre o fato da derivada conformável não ser de fato uma derivada fracionária, pois perde o caráter não-local introduzido pelas derivadas fracionárias tradicionais (Tarasov, 2018), como por exemplo, Caputo e

Riemann-Liouville, sendo considerada uma derivada de caráter local através de uma simples mudança de variável (Abdelhakim, 2019; Abdelhakim and Machado, 2019; Anderson et al., 2019). De fato, a derivada conformável transforma uma derivada fracionária em uma derivada de ordem inteira, a qual, diferentemente das derivadas fracionárias tradicionais, obedece a todas as regras tradicionais do cálculo. Do ponto de vista teórico, perde o caráter não-local (efeito de memória) contido na derivada fracionária, o qual normalmente é introduzido nos problemas atmosféricos no coeficiente de difusão dependente da distância da fonte (Moreira et al., 2005b; Moreira et al., 2014), mas tem o ganho da introdução de um parâmetro fracionário na equação e obediência as bem conhecidas regras do cálculo tradicional.

Portanto, o objetivo deste trabalho é avançar no conhecimento resolvendo-se analiticamente a equação de difusão-advecção 3D fracionária (steady state), porém, diferentemente do trabalho de Moreira et al. (2019), utilizando-se somente o método LDM (Khuri, 2001), comparando-se a solução obtida com o uso da definição de derivada fracionária de Caputo (Caputo, 1967) e a obtida com a aplicação da derivada conformável (Khalil et al., 2014), para diferentes valores do parâmetro fracionário e da constante de dimensionalidade. Importante salientar que em poucos trabalhos de outras áreas do conhecimento esta comparação já foi realizada, porém, quando feita, contém uma explanação puramente matemática (Rosales et al., 2018; Yokus, 2018). Assim, em problemas atmosféricos esta comparação é feita pela primeira vez, além da solução ser obtida integralmente pelo método LDM (Adomian, 1991; Adomian, 1994; Khuri, 2001). O método LDM é um algoritmo baseado na técnica da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares. O método é muito bem adaptado a problemas físicos, pois não requer linearização, perturbação, ou outros métodos ou suposições restritivas que possam mudar a situação física a ser resolvida.

Na sequência é apresentada a metodologia de resolução da equação de difusão-advecção usando o método LDM com a derivação de Caputo e também pela derivada conformável e os

resultados numéricos são apresentados e comparados com dados experimentais.

A equação de ordem inteira de difusão-advectação é amplamente utilizada para modelar a dispersão de poluentes atmosféricos. No entanto, continua sendo um grande desafio que nenhuma solução analítica tenha existido para a equação tradicional em sua forma geral e com os parâmetros físicos todos dependentes de variáveis espaciais e temporais. Além disso, as derivadas fracionárias aumentam a complexidade da obtenção de uma solução analítica se todas as derivadas forem de ordem não-inteira. Assim, para obter uma solução analítica, normalmente são feitas suposições simplificadas.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo  $x$  alinhado com a velocidade média do vento  $u$  no sentido longitudinal, o eixo  $y$  alinhado com a velocidade média do vento  $v$  no sentido transversal, e o eixo  $z$  alinhado com a velocidade média do vento  $w$  no sentido vertical. Vamos também fazer as seguintes suposições simplificadoras: i) existem condições de estado estável; ii) as velocidades do vento  $v$  e  $w$  na direção transversal e vertical, respectivamente, são zero; iii) o termo advectivo na direção  $x$  é muito maior que o termo difusivo na mesma direção; iv) não ocorre nenhuma reação química; v) no caso do estudo, a velocidade do vento  $u$  na direção longitudinal é constante e o termo difusivo depende apenas de  $x$ .

Com base nessas suposições, a equação tridimensional com derivada fracionária em termos advectivos pode ser escrita da seguinte forma:

$$u \frac{\partial^\alpha c(x, y, z)}{\partial x^\alpha} = K_y(x) \frac{\partial^2 c(x, y, z)}{\partial y^2} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, y, z)}{\partial z^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (121)$$

para  $0 < z < h$ ,  $0 < y < L_y$  e  $x > 0$ , onde  $h$  é a altura da camada limite planetária (PBL),  $L_y$  é uma distância longe da fonte na direção  $y$ ,  $c$  é a concentração,  $\alpha$  é a ordem do operador

fracionário,  $u$  é a velocidade do vento longitudinal e  $K_z$  e  $K_y$  são as difusividades verticais e laterais, respectivamente. Neste trabalho, as difusividades verticais e laterais são consideradas como dependendo apenas da distância longitudinal da fonte (Sharan e Modani, 2006):

$$K_z(x) = \left(\frac{\sigma_w}{u}\right)^2 ux = \frac{(\sigma_w)^2}{u} x = \omega x \quad \text{and} \quad K_y(x) = \left(\frac{\sigma_v}{u}\right)^2 ux = \frac{(\sigma_v)^2}{u} x = \beta x \quad (122)$$

onde  $\omega = \sigma_w^2 / u$  e  $\beta = \sigma_v^2 / u$  são constantes and  $\sigma_w$  e  $\sigma_v$  (valores experimentais) são o desvio padrão de velocidade vertical e lateral, respectivamente. Para ser consistente na dimensionalidade e seguindo Gomez-Aguilar et al. (2016), um parâmetro auxiliar é introduzido como segue (Moreira e Santos, 2019):

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{1}{\varphi^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \quad (123)$$

e isto é verdade se o parâmetro  $\varphi$  tiver dimensões de comprimento [L]. Portanto, a representação fracionária de Eq. (121) com a inclusão das difusividades (Eq. (122)) e o parâmetro  $\varphi$  é o seguinte:

$$\frac{u}{\varphi^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha c}{\partial x^\alpha} = \beta x \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \omega x \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (124)$$

É claro de que esta é uma aproximação, mas efetivamente este problema está aberto na literatura: normalmente as equações fracionárias são inconsistentes quando analisadas em sua forma dimensional.

Para resolver a Eq. (124), é necessário determinar os limites e as condições de origem. Assim, são utilizadas as condições usuais de fluxo zero de poluentes na superfície e no topo do domínio vertical (altura PBL):

$$K_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = z_0, h \quad (125a)$$

onde  $z_0$  é o comprimento da rugosidade. As condições de contorno em  $y$  são dadas por:

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad , \quad y = 0, L_y \quad (125b)$$

Bem como uma fonte com taxa de emissão  $Q$  na altura  $H_s$  da fonte:

$$uc(0, y, z) = Q\delta(z - H_s)\delta(y - y_0) \quad (125c)$$

Por conveniência, a função delta de Dirac na direção vertical pode ser aproximada pela seguinte forma fracionária:

$$\delta(z - H_s) = \frac{1}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (126)$$

onde os valores próprios são dados pela seguinte expressão:

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{h} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (127)$$

De forma similar (sendo  $y_0 = 0$ , linha central):

$$\delta(y - y_0) = \frac{1}{L_y} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) \right] \quad (128)$$

com auto-valores dados por:

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{L_y}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (129)$$

Assim, a condição da fonte pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c(0, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) \right] \quad (130)$$

### 3.9.1 Solução da equação difusão-advecção usando Caputo

Para resolver a Eq. (124) no sentido de Caputo, por simplicidade, usa-se uma mudança de variável dada por (Jumarie, 2008; Moreira et al., 2014):

$$X^\alpha = \int_0^x x'(dx')^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \quad (131)$$

Logo, resulta a equação,

$$\frac{\partial^\alpha c(X, y, z)}{\partial X^\alpha} = \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \quad (132)$$

Aqui é possível aplicar o método LDM para coeficientes constantes. Para maiores detalhes sobre o método ver o trabalho de Khuri (2001). Inicia-se com a aplicação da transformada de Laplace ( $\mathcal{L}$ ) na variável  $X$ , no sentido de Caputo (Eq. (21)):

$$\mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial^\alpha c}{\partial X^\alpha} \right\} = \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right\} \quad (133)$$

após a aplicação,

$$s^\alpha \bar{c}(s, y, z) - s^{\alpha-1} c(0, y, z) = \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \quad (134)$$

Isolando o termo transformado,

$$\bar{c}(s, y, z) = \frac{1}{s} c(0, y, z) + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \quad (135)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) para Eq. (135) e usando o método padrão, no qual a solução é representada como uma série infinita, obtém-se o seguinte:

$$c(X, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, y, z) \quad (136)$$

O resultado é o seguinte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, y, z) = c(0, y, z) + \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c_k(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c_k(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (137)$$

Comparando os dois lados da Eq. (137),  $c_0(X, y, z) = c(0, y, z)$  dado por Eq. (130).

Portanto, para obter os outros termos da solução em série, temos a seguinte fórmula recursiva:

$$c_k = \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c_{k-1}}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c_{k-1}}{\partial z^2} \right\} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (138)$$

Assumindo,  $\sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) = a$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) = b$ , a condição de fonte (130) resulta,

$$c(0, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} (1+2b)(1+2a) \quad (139)$$

onde  $c_0$  é dado pela Eq. (130) e os demais termos são calculados pela Eq. (138). Por questão

de notação,  $\lambda_j = A$  e  $\lambda_n = B$ . Assim, os primeiros termos são dados por,

$$c_0(X, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} (1+2b)(1+2a) \quad (140)$$

$$c_1(X, y, z) = -\frac{Q}{uhL_y} \left[ 2\varphi^{1-\alpha} \left( \frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \left( \frac{\beta}{u} (1+2b)aA^2 + \frac{\omega}{u} (1+2a)bB^2 \right) \right] \quad (141)$$

$$c_2(X, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ 2\varphi^{2(1-\alpha)} \left( \frac{X^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \left( \left( \frac{\beta}{u} \right)^2 (1+2b)aA^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \frac{\beta\omega}{u^2} abA^2B^2 + \left( \frac{\omega}{u} \right)^2 (1+2a)bB^4 \right) \right] \quad (142)$$

e assim por diante.

Tendo em mente que a função de Mittag-Leffler de um parâmetro de forma genérica dada pela Eq. (27), assumindo a Eq. (131) e algum algebrismo obtém-se, finalmente:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) E_{\alpha} \left( -\varphi^{1-\alpha} \left( \frac{\sigma_v}{u} \right)^2 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} \lambda_j^2 \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) E_{\alpha} \left( -\varphi^{1-\alpha} \left( \frac{\sigma_w}{u} \right)^2 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} \lambda_i^2 \right) \right) \right] \quad (143)$$

### 3.9.2 Solução com derivadas conformáveis

Aplicando-se a Eq. (25) na Eq. (124), utilizando-se as derivadas conformáveis, tem-se:

$$x^{1-\alpha} \frac{\partial c}{\partial x} = \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta x}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega x}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (144)$$

Ajustando a equação,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta x^{\alpha}}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega x^{\alpha}}{u} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (145)$$

Por conveniência, fazendo uma mudança de variável (Jumarie, 2008):

$$X = \int_0^x x'^{\alpha} dx' = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (146)$$

Tem-se a equação a ser resolvida:

$$\frac{\partial c(X, y, z)}{\partial X} = \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \quad (147)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na variável  $X$ :

$$s\bar{c}(s, y, z) - c(0, y, z) = \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \quad (148)$$

Isolando-se o termo transformado,

$$\bar{c}(s, y, z) = \frac{1}{s} c(0, y, z) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \quad (149)$$

Novamente, aplicando a transformada de Laplace inversa ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) para a Eq. (149) e usando o método padrão, no qual a solução é representada como uma série infinita, obtemos o seguinte:

$$c(X, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, y, z) \quad (150)$$

O resultado é o seguinte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, y, z) = c(0, y, z) + \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c_k(X, y, z)}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c_k(X, y, z)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (151)$$

Comparando os dois lados do Eq. (151), temos  $c_0(X, y, z) = c(0, y, z)$  dado por Eq. (130).

Portanto, para obter os outros termos da solução em série, temos a seguinte fórmula recursiva:

$$c_k = \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}_x \left\{ \varphi^{1-\alpha} \frac{\beta}{u} \frac{\partial^2 c_{k-1}}{\partial y^2} + \varphi^{1-\alpha} \frac{\omega}{u} \frac{\partial^2 c_{k-1}}{\partial z^2} \right\} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (152)$$

Usando-se a mesma estratégia da Eq. (139) e a fórmula recursiva (152), resulta para os primeiros termos:

$$c_0(X, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} (1+2b)(1+2a) \quad (153)$$

$$c_1(X, y, z) = -\frac{Q}{uhL_y} \left[ 2\varphi^{1-\alpha} \frac{X}{1!} \left( \frac{\beta}{u} (1+2b) aA^2 + \frac{\omega}{u} (1+2a) bB^2 \right) \right] \quad (154)$$

$$c_2(X, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ 2\varphi^{2(1-\alpha)} \frac{X^2}{2!} \left( \left( \frac{\beta}{u} \right)^2 (1+2b) aA^4 + 4 \frac{\beta\omega}{u^2} abA^2B^2 + \left( \frac{\omega}{u} \right)^2 (1+2a) bB^4 \right) \right] \quad (155)$$

⋮

e assim por diante.

A forma genérica da função exponencial é dada pela Eq. (28). Logo, assumindo a Eq. (146),

a solução final é dada por:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) \exp \left( -\varphi^{1-\alpha} \left( \frac{\sigma_v}{u} \right)^2 \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \lambda_j^2 \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \exp \left( -\varphi^{1-\alpha} \left( \frac{\sigma_w}{u} \right)^2 \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \lambda_i^2 \right) \right) \right] \quad (156)$$

Observa-se muita similaridade entre as Eqs. (143) e (156). A diferença entre as duas equações é que na Eq. (143) aparece a função de Mittag-Leffler e na Eq. (156) tem-se a função exponencial. Pode-se verificar que a Eq. (143) é mais geral que a Eq. (156), pois a função de Mittag-Leffler é a generalização da exponencial ( $E_1(z) = e^z$ ). Portanto, o caráter não local da derivada de Caputo está embutido na função de Mittag-Leffler.

Além disso, é possível citar alguns casos especiais:

a) Eqs. (143) e (156) com  $\alpha = 1$  (solução de ordem inteira) são ambas iguais a:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\lambda_j y) \exp \left( -\left( \frac{\sigma_v}{u} \right)^2 \frac{x^2}{2} \lambda_j^2 \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \exp \left( -\left( \frac{\sigma_w}{u} \right)^2 \frac{x^2}{2} \lambda_i^2 \right) \right) \right] \quad (157)$$

b) Eq. (157) com  $z = 0$ ,  $H_s = 0$  (fonte ao nível de solo),  $y = 0$  (linha central):

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{uhL_y} \left[ \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp \left( -\left( \frac{\sigma_v}{u} \right)^2 \frac{x^2}{2} \lambda_j^2 \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left( -\left( \frac{\sigma_w}{u} \right)^2 \frac{x^2}{2} \lambda_i^2 \right) \right) \right] \quad (158)$$

As soluções dadas por Eqs. (143) e (156) representam um importante avanço nas soluções analíticas da equação de advecção-difusão fracionária usando o método LDM completo, apesar de usar uma abordagem diferente com Caputo e derivados conformáveis, pois são soluções mais gerais. Embora as difusividades consideradas neste trabalho e dadas por Eq. (122) dependam apenas da distância da fonte, o procedimento de solução pode ser usado para coeficientes variáveis na direção vertical.

### **3.10 Uma abordagem semi-analítica na solução da equação de difusão-advecção bidimensional transiente fracionária para estudo da dispersão de poluentes na camada limite planetária**

Nesta seção será obtida uma solução semi-analítica da equação de difusão-advecção 2D transiente fracionária (ordem não-inteira) para o estudo da dispersão de poluentes atmosféricos. A solução foi obtida considerando-se a derivada fracionária no sentido de Caputo na derivada temporal. Para atingir o objetivo foi utilizado o método LDM (*Laplace Decomposition Method*) usando transformada de Laplace na variável temporal e espacial longitudinal. Devido à complexidade do problema, na transformada inversa de Laplace na variável temporal foi necessário usar o método numérico FT (Fixed-Talbot). Os resultados numéricos mostram uma rápida convergência da série, além de considerar o efeito de memória característico das derivadas fracionárias. As análises numéricas dos resultados desta seção é proposta para trabalhos futuros.

#### **3.10.1. difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem inteira.**

Pode-se escrever a equação como:

$$\frac{\partial c(x, z, t)}{\partial t} = -u \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z, t)}{\partial z^2} \quad (159)$$

para  $0 < z < h$ ,  $t > 0$  e  $x > 0$ ,  $u$  é a velocidade do vento longitudinal e  $K_z(x)$  é a difusividade vertical.

Condição inicial:

$$c(x, z, 0) = 0 \quad (160)$$

Condição de fonte:

$$c(0, z, t) = \frac{Q}{uh} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (161)$$

Aplicando a transformada de Laplace na condição de fonte, temos:

$$\bar{c}(0, z, s) = \frac{Q}{uhs} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (162)$$

Aplicando a transformada de Laplace em  $t$ , nos dois membros da equação diferencial transiente, temos:

$$s\bar{c}(x, z, s) - c(x, z, 0) + u \frac{\partial \bar{c}(x, z, s)}{\partial x} = wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \quad (163)$$

Aplicando a transformada de Laplace em x,

$$s\bar{\bar{c}}(p, z, s) + u[p\bar{\bar{c}}(p, z, s) - \bar{c}(0, z, s)] = \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (164)$$

$$s\bar{\bar{c}}(p, z, s) + up\bar{\bar{c}}(p, z, s) = u\bar{c}(0, z, s) + \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (165)$$

$$\bar{\bar{c}}(p, z, s) = \frac{1}{s^2 + s.u.p} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \frac{1}{s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (166)$$

Aplicando a transformada inversa em x, nos dois lados da expressão, temos:

$$\bar{c} = \frac{e^{-\frac{sx}{su}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (167)$$

Assim usando o LDM,

$$\bar{c}_0 = \frac{e^{-\frac{sx}{su}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (168)$$

e,

$$\bar{c}_{n+1} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}_n(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (169)$$

aplicando as fórmulas acima temos os três primeiros termos:

$$\bar{c}_0 = \frac{Qe^{-\frac{sx}{u}}}{hsu} + \frac{2Qe^{-\frac{sx}{u}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n]}{hsu} \quad (170)$$

$$\bar{c}_1 = \frac{Qe^{-\frac{sx}{u}} wx^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n] \lambda_n^2}{hsu^2} \quad (171)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{Qe^{-\frac{sx}{u}} w^2 x^4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n] \lambda_n^4}{4hsu^3} \quad (172)$$

A partir destes resultados podemos escrever a função transiente da concentração em função da transformada inversa:

$$c(x, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\gamma-it}^{\gamma+it} e^{st} \left[ \frac{e^{-\frac{sx}{u}} Q}{su} \frac{Q}{h} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) e^{-\frac{wx^2 \lambda_i^2}{2u}} \right) \right] ds \quad (173)$$

Esta transformada será calculada utilizando o método numérico Talbot Fixo(FT).

### 3.10.2 difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem fracionária usando Caputo.

Pode-se escrever a equação como:

$$\varphi^{\alpha-1} \frac{\partial c^\alpha(x, z, t)}{\partial t^\alpha} = u \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z, t)}{\partial z^2} \quad (174)$$

para  $0 < z < h$ ,  $t > 0$  e  $x > 0$ ,  $u$  é a velocidade do vento longitudinal,  $\alpha$  é o parâmetro fracionário,  $\varphi$  o parâmetro dimensional e  $K_z(x)$  é a difusividade vertical.

Condição inicial:

$$c(x, z, 0) = 0 \quad (175)$$

Condição de fonte:

$$c(0, z, t) = \frac{Q}{uh} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (176)$$

Aplicando a transformada de Laplace na condição de fonte, temos:

$$\bar{c}(0, z, s) = \frac{Q}{uhs} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (177)$$

Aplicando a transformada de Laplace em  $t$ , nos dois membros da equação diferencial transiente, temos:

$$\varphi^{\alpha-1} s^{\alpha} \bar{c}(x, z, s) - s^{\alpha-1} c(x, z, 0) + u \frac{\partial \bar{c}(x, z, s)}{\partial x} = wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \quad (178)$$

Aplicando a transformada de Laplace em  $x$ ,

$$\varphi^{\alpha-1} s^\alpha \bar{c}(p, z, s) + u [p \bar{c}(p, z, s) - \bar{c}(0, z, s)] = \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (179)$$

$$\varphi^{\alpha-1} s^\alpha \bar{c}(p, z, s) + up \bar{c}(p, z, s) = u \bar{c}(0, z, s) + \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (180)$$

$$\bar{c}(p, z, s) = \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s^{\alpha+1} + s.u.p} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \frac{1}{s^\alpha + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (181)$$

Aplicando a transformada inversa em x, nos dois lados da expressão, temos:

$$\bar{c} = \frac{e^{-\frac{s^\alpha \varphi^{\alpha-1} x}{u}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (182)$$

Assim usando o LDM,

$$\bar{c}_0 = \frac{e^{-\frac{s^\alpha \varphi^{\alpha-1} x}{u}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (183)$$

e,

$$\bar{c}_{n+1} = \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}_n(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (184)$$

aplicando as fórmulas acima temos os três primeiros termos:

$$\bar{c}_0 = \frac{e^{-\frac{s^\alpha x \varphi^{-1+\alpha}}{u}}}{hsu} + \frac{2e^{-\frac{s^\alpha x \varphi^{-1+\alpha}}{u}}}{hsu} Q \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H \lambda_n] \cos[z \lambda_n] \quad (185)$$

$$\bar{c}_1 = \frac{e^{-\frac{s^\alpha x \varphi^{-1+\alpha}}{u}} Q w x^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\cos[H \lambda_n] \cos[z \lambda_n] \lambda_n^2}{h s u^2} \quad (186)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{e^{-\frac{s^\alpha x \varphi^{-1+\alpha}}{u}} Q w^2 x^4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H \lambda_n] \cos[z \lambda_n] \lambda_n^4}{4 h s u^3} \quad (187)$$

A partir destes resultados podemos escrever a função transiente da concentração em função da transformada inversa:

$$c(x, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\gamma-it}^{\gamma+it} e^{st} \left[ \frac{e^{-\frac{s^\alpha \varphi^{\alpha-1} x}{u}}}{s u} \frac{Q}{h} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) e^{-\frac{w x^2 \lambda_i^2}{2u}} \right) \right] ds \quad (188)$$

Esta transformada será calculada utilizando o método numérico Talbot Fixo(FT).

### 3.10.3 difusão-advecção bidimensional transiente, na modelagem fracionária usando Conformável.

Pode-se escrever a equação como:

$$\varphi^{\alpha-1} \frac{\partial c^\alpha(x, z, t)}{\partial t^\alpha} = u \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z, t)}{\partial z^2} \quad (189)$$

para  $0 < z < h$ ,  $t > 0$  e  $x > 0$ ,  $u$  é a velocidade do vento longitudinal,  $\alpha$  é o parâmetro fracionário,  $\varphi$  o parâmetro dimensional e  $K_z(x)$  é a difusividade vertical.

Aplicando a derivada conformável, temos:

$$\varphi^{\alpha-1} t^{1-\alpha} \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial t} = u \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z, t)}{\partial z^2} \quad (190)$$

Usando a mudança de variável,

$$T = \int_0^x t^{\alpha-1} dt = \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (191)$$

Temos:

$$\varphi^{\alpha-1} \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial T} = u \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial x} + K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z, t)}{\partial z^2} \quad (192)$$

Condição inicial:

$$c(x, z, 0) = 0 \quad (193)$$

Condição de fonte:

$$c(0, z, t) = \frac{Q}{uh} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (194)$$

Aplicando a transformada de Laplace na condição de fonte, temos:

$$\bar{c}(0, z, s) = \frac{Q}{uhs} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (195)$$

Aplicando a transformada de Laplace em t, nos dois membros da equação diferencial transiente, temos:

$$\varphi^{\alpha-1} s \bar{c}(x, z, s) - c(x, z, 0) + u \frac{\partial \bar{c}(x, z, s)}{\partial x} = wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \quad (196)$$

Aplicando a transformada de Laplace em x,

$$\varphi^{\alpha-1} s \bar{\bar{c}}(p, z, s) + u [p \bar{\bar{c}}(p, z, s) - \bar{c}(0, z, s)] = \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (197)$$

$$\varphi^{\alpha-1} s \bar{\bar{c}}(p, z, s) + up \bar{\bar{c}}(p, z, s) = u \bar{c}(0, z, s) + \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (198)$$

$$\bar{\bar{c}}(p, z, s) = \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s + su.p} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \quad (199)$$

Aplicando a transformada inversa em x, nos dois lados da expressão, temos:

$$\bar{c} = \frac{e^{-\frac{s\varphi^{\alpha-1}x}{u}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] + \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi^{\alpha-1} s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (200)$$

Assim usando o LDM,

$$\bar{c}_0 = \frac{e^{-\frac{s\varphi^{\alpha-1}x}{u}}}{su} \frac{Q}{h} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) \right] \quad (201)$$

e,

$$\bar{c}_{n+1} = \mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi^{\alpha-1}s + u.p} \mathcal{L}_x \left\{ wx \frac{\partial^2 \bar{c}_n(x, z, s)}{\partial z^2} \right\} \right\} \quad (202)$$

aplicando as fórmulas acima temos os três primeiros termos:

$$\bar{c}_0 = \frac{e^{-\frac{sx\varphi^{-1+\alpha}}{u}}}{hsu} Q + \frac{2e^{-\frac{sx\varphi^{-1+\alpha}}{u}} Q \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n]}{hsu} \quad (203)$$

$$\bar{c}_1 = \frac{e^{-\frac{sx\varphi^{-1+\alpha}}{u}} Q wx^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n] \lambda_n^2}{hsu^2} \quad (204)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{e^{-\frac{sx\varphi^{-1+\alpha}}{u}} Q w^2 x^4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[H\lambda_n] \cos[z\lambda_n] \lambda_n^4}{4hsu^3} \quad (205)$$

A partir destes resultados podemos escrever a função transiente da concentração em função da transformada inversa:

$$c(x, z, T) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{sT} \left\{ \frac{e^{-\frac{s\varphi^{\alpha-1}x}{u}}}{su} \frac{Q}{h} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos(\lambda_i H_s) \cos(\lambda_i z) e^{-\frac{wx^2 \lambda_i^2}{2u}} \right) \right\} ds \quad (206)$$

Lembrando que:

$$T = \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (207)$$

Esta transformada será calculada utilizando o método numérico Talbot Fixo(FT).

# Capítulo 4

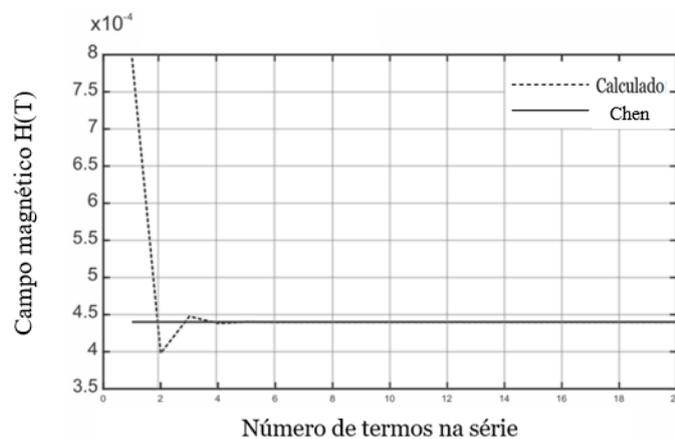
## 4. Resultados

### 4.1 Resultados numéricos da Aplicação da derivada fracionária no método da resistividade magnetométrica (MMR)

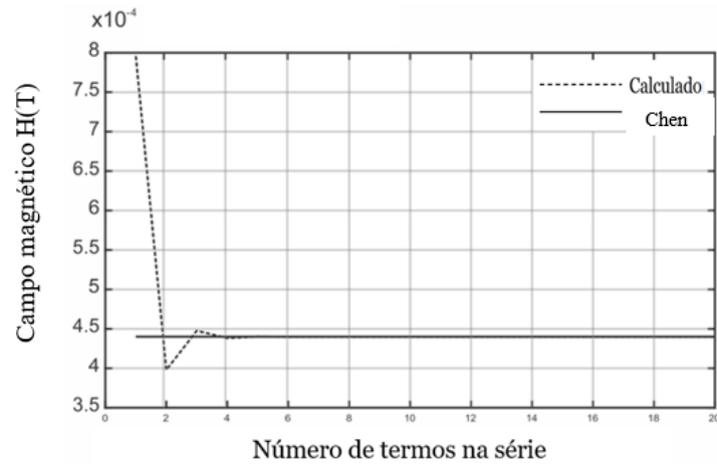
Nesta seção, os resultados da sensibilidade e dos testes de convergência, são mostrados para o caso representado pela Eq. (50) (ordem inteira) para o problema de uma fonte pontual, e são comparados com Eq. (51), ou seja, o modelo de Chen (Chen e Oldenburg 2004), denominado aqui de solução exata, fazendo variar  $r$  e  $z$ . A figura 2 mostra a convergência considerando os casos de  $r = 100$  m e  $z = 80$  m ( $r/z = 1,25$ ),  $r = 100$  m e  $z = 50$  m ( $r/z = 2$ ), e  $r = 1000$  m e  $z = 100$  m ( $r/z = 10$ ). A Figura 2 mostra claramente a convergência quando o número de termos da série, representado por Eq. (50), aumenta. A convergência é muito rápida, pois ocorre apenas com alguns termos da série, e é mais rápida quando a relação  $r/z$  aumenta.

**Figura 2:** Teste de convergência para Eq. (50), em comparação com Eq. (51), para: a)  $r = 100$  m,  $z = 80$  m; b)  $r = 100$  m,  $z = 50$  m; c)  $r = 1000$  m,  $z = 100$  m

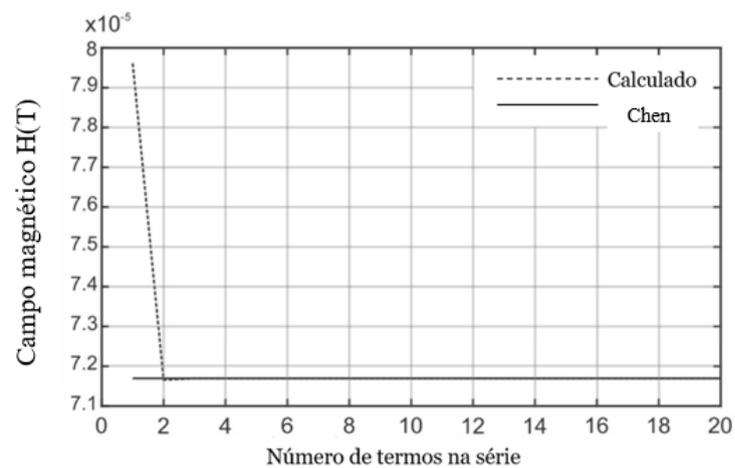
a)



b)



c)

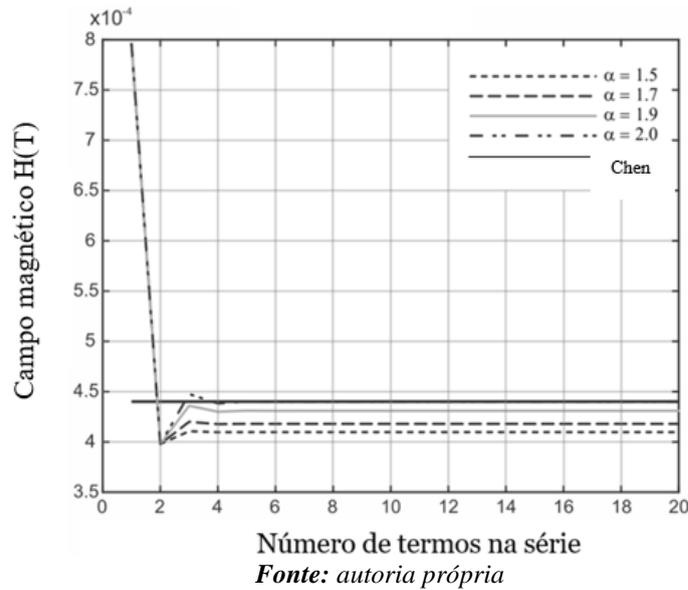


*Fonte: autoria própria*

A Figura 3 apresenta os resultados das simulações da Eq. (60), que é o caso fracionário do problema de uma fonte pontual, considerando uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes ( $r = 100$  m e  $z = 50$  m), com valores diferentes do parâmetro fracionário  $\alpha$ .

A figura 3 mostra o teste de convergência da Eq. (60) com o parâmetro fracionário variando entre 1,5 e 2. Quando  $\alpha = 2$ , a solução da equação diferencial de ordem inteira, dada por Eq. (50) é obtida.

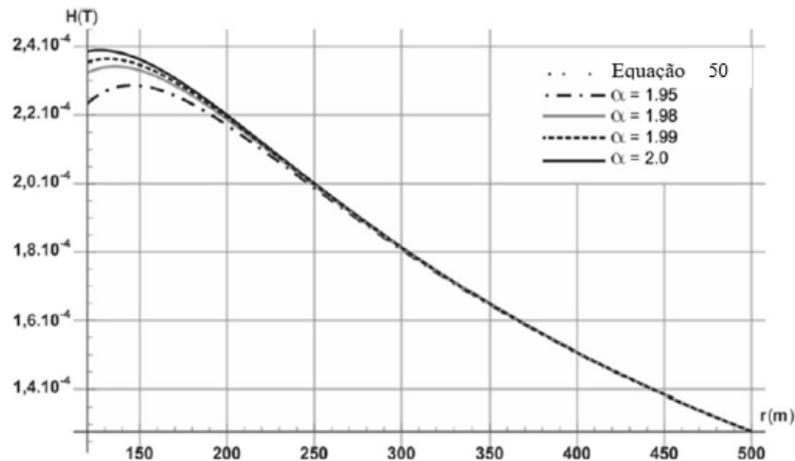
**Figura 3:** Teste de convergência para Eq. (60), em comparação com Eq. (51), para  $r = 100$  m e  $z = 50$  m.



*Fonte: autoria própria*

A figura 4 mostra uma comparação entre Eq. (50) e Eq. (60), com a Eq. (60) variando o parâmetro fracionário entre 1,95 e 2.

**Figura 4:** Comparação entre Eq. (50), de ordem inteira, e Eq. (60), de ordem fracionária

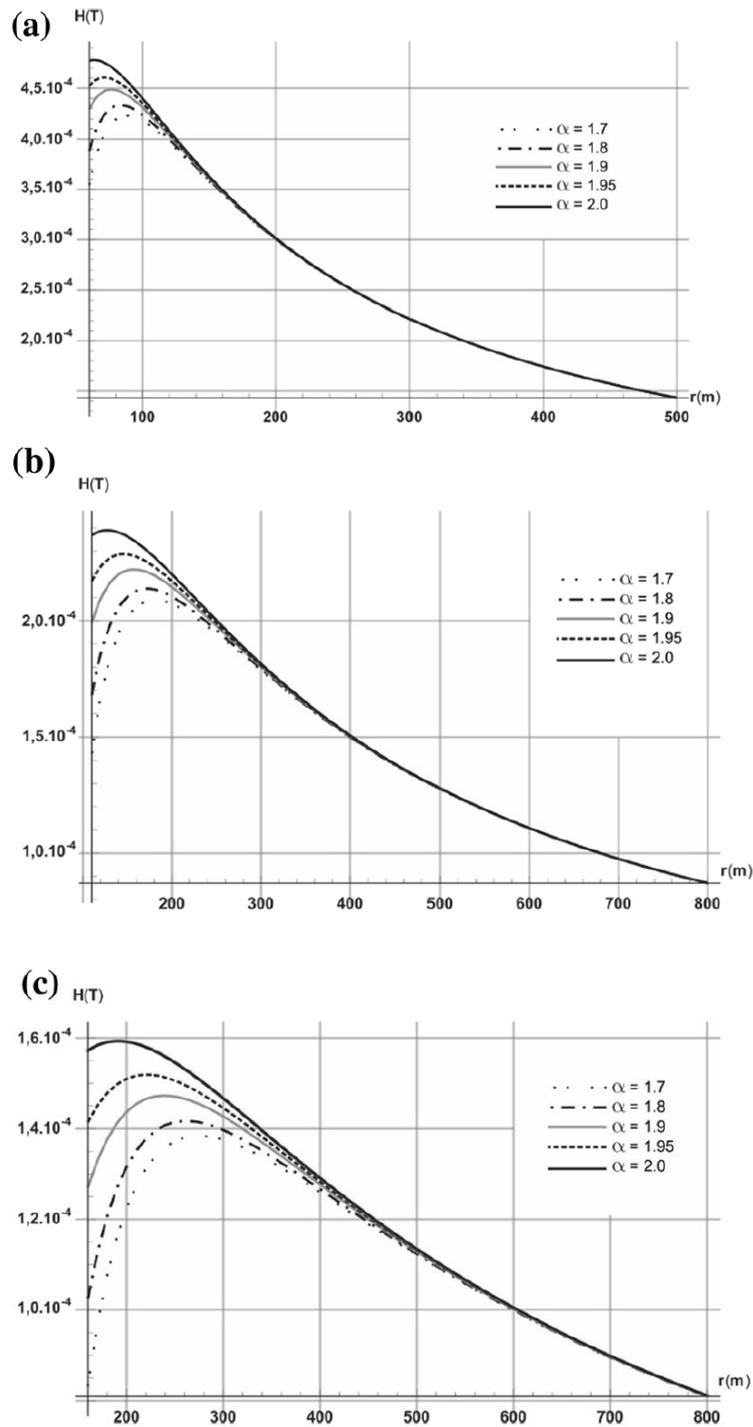


*Fonte: autoria própria*

Pode-se ver que, quando  $\alpha = 2$ , a solução do equação diferencial de ordem inteira dada pela Eq. (50) é obtida, mostrando assim o caráter geral da solução representada por Eq. (60).

A figura 5 apresenta uma comparação entre os resultados encontrados em (Chen e Oldenburg, 2004), expressa por Eq. (51), e a solução fracionária dada por Eq. (60) com  $\alpha = 1,7, 1,8, 1,9, 1,95$  e 2, para  $z = 50, 100,$  e 150 m.

**Figura 5:** Campo magnético em função da distância radial considerando  $\alpha = 1,7, 1,8, 1,9, 1,95$  e  $2$  para: a)  $z = 50$  m; b)  $z = 100$  m; c)  $z = 150$  m.



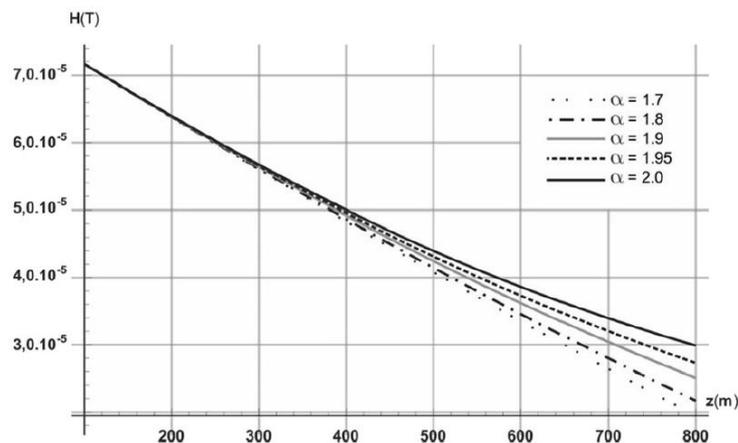
Fonte: autoria própria

Pode ser observado na Fig. 5 que, para valores de  $\alpha$  variando de 1,7 a 2, a curva fracionária se aproxima do modelo de Chen e, para  $\alpha = 2$ , a solução dado por Eq. (51) é obtida. Além disso, pode ser visto claramente que, à medida que a profundidade  $z$  aumenta, a influência

do parâmetro fracionário  $\alpha$  também aumenta. Isto faz sentido, porque com o aumento da profundidade, o valor do campo diminui.

A figura 6 mostra a solução fracionária representada pela Eq. (60), no qual o campo magnético é uma função da profundidade ( $z$ ), a distância radial  $r$  é ajustada para 1000 m, e diferentes parâmetros fracionários são considerados ( $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 1.95, 2$ ).

**Figura 6:** Campo magnético em função da profundidade ( $z$ ), com  $r = 1000$  m e  $\alpha = 1,7, 1,8, 1,9, 1,95, e 2$ .



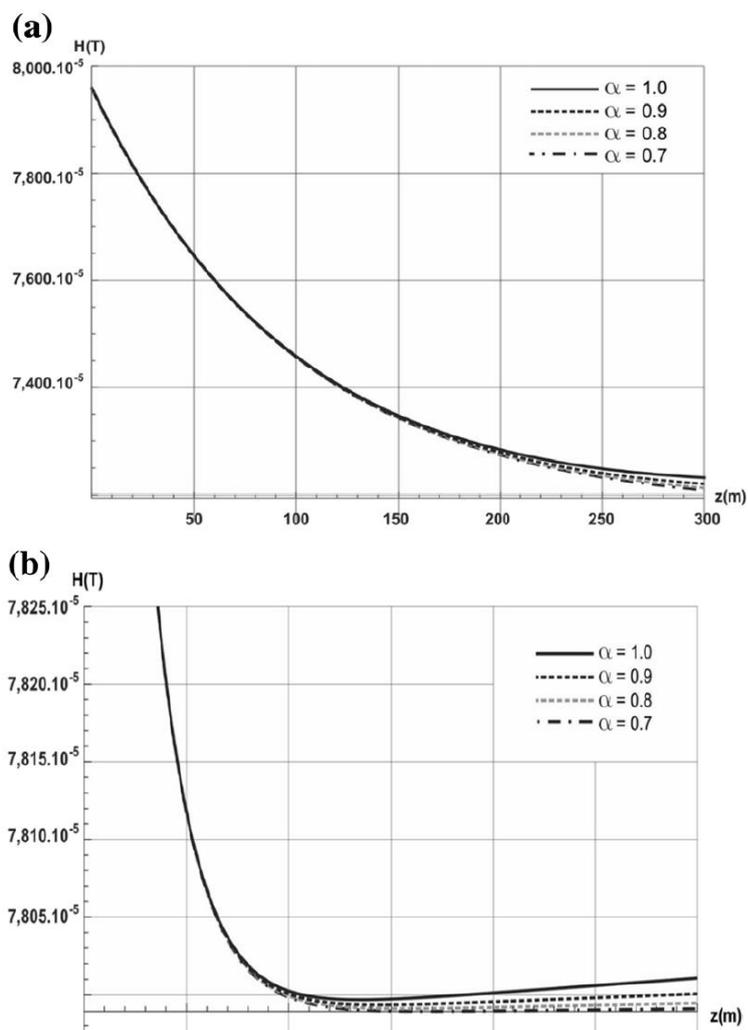
Fonte: autoria própria

Pode ser visto na Fig. 6 que quando  $z$  se aproxima zero, o campo magnético tende a um valor constante, independentemente do expoente fracionário. Quando  $\alpha = 2$ , a solução exata é obtida. Por outro lado, em torno de  $z = 300$  m, as curvas para  $\alpha < 2$  tendem a se desviam da curva exata. O desvio causado pela escolha de um  $\alpha$  permite uma análise comparativa entre os parâmetros do meio e este parâmetro fracionário (por exemplo: a resistência, condutividade e permeabilidade).

As figuras 7 e 8 apresentam uma solução de Eq. (72), destacando a influência dos parâmetros  $\beta$ ,  $r$ , e  $z$  para diferentes valores do parâmetro fracionário  $\alpha$ .

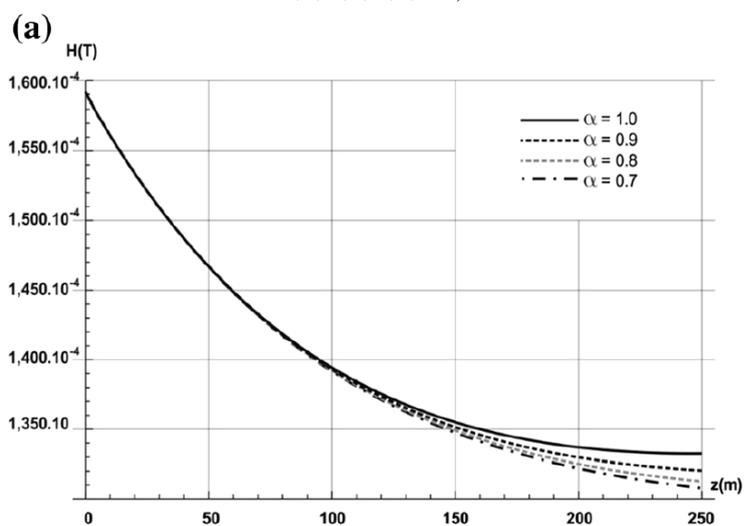
Nas figuras. 7 e 8, o campo magnético é mostrado como uma função da profundidade ( $z$ ), com  $r = 1000$  e  $500$  m, respectivamente.

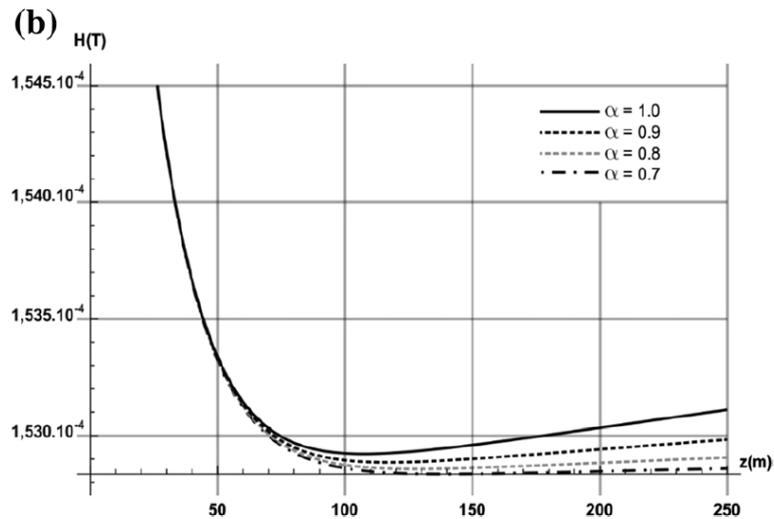
**Figura 7:** Campo magnético em função da profundidade ( $z$ ), com  $r = 1000$  m e: a)  $\beta = 0,01$ ; b)  $\beta = 0,05$  ( $\alpha = 0,7, 0,8, 0,9, 1$ )



*Fonte: autoria própria*

**Figura 8:** Campo magnético em função da profundidade  $z$ , com  $r = 500$  m: a)  $\beta = 0,01$ ; b)  $\beta = 0,05$  ( $\alpha = 0,7, 0,8, 0,9, e 1$ )





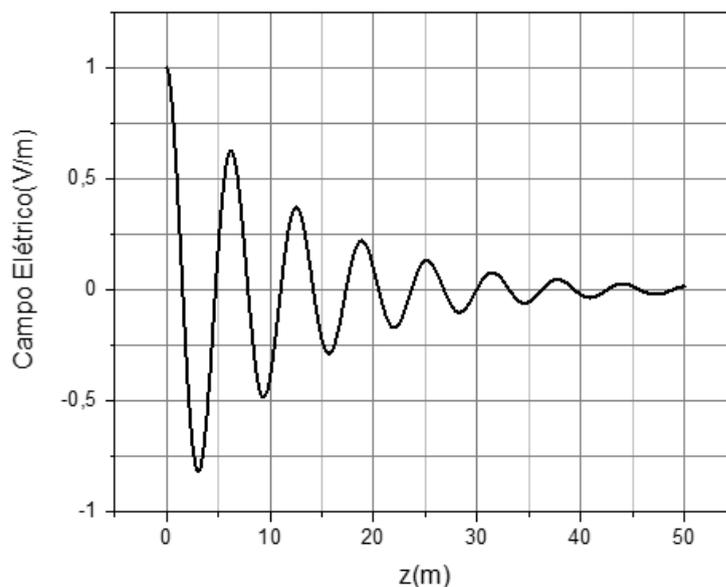
*Fonte: autoria própria*

Pode-se ver pelas figuras que, para  $\beta = 0,01$  ocorre uma queda mais rápida do valor do campo magnético, em comparação com o caso de  $\beta = 0,05$  (isto é, conforme  $\beta$  aumenta, a condutividade diminui). As curvas, para diferentes valores de  $\alpha$ , tornam-se distintas a uma profundidade de cerca de 150 m para  $r = 1000$  m com  $\beta = 0,01$ , e cerca de 100 m para  $r = 1000$  m e  $\beta = 0,05$ . A diferenciação das curvas já são vistas a cerca de 100 m de profundidade  $r = 500$  m para  $\beta = 0,01$ , e cerca de 50 m para  $\beta = 0,05$ . Em outras palavras, a curva se move com a parâmetro  $\beta$  crescente, mostrando assim a influência de atenuação na solução. O parâmetro  $\alpha$  atenua o comportamento da solução de maneira semelhante, mas este efeito é visto quando o parâmetro diminuiu em vez de aumentar.

#### 4.2 Resultados numéricos do caso das ondas eletromagnéticas planas

Por conveniência, adota-se  $w = 3 \cdot 10^8$  rad/s e, por consequência,  $\beta = 1$  rad/m. Fazendo-se  $a = 1,9$  e o tempo igual ao período, tem-se o campo elétrico representado pela Figura 9.

**Figura 9:** Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) com  $\alpha = 1.9$ .



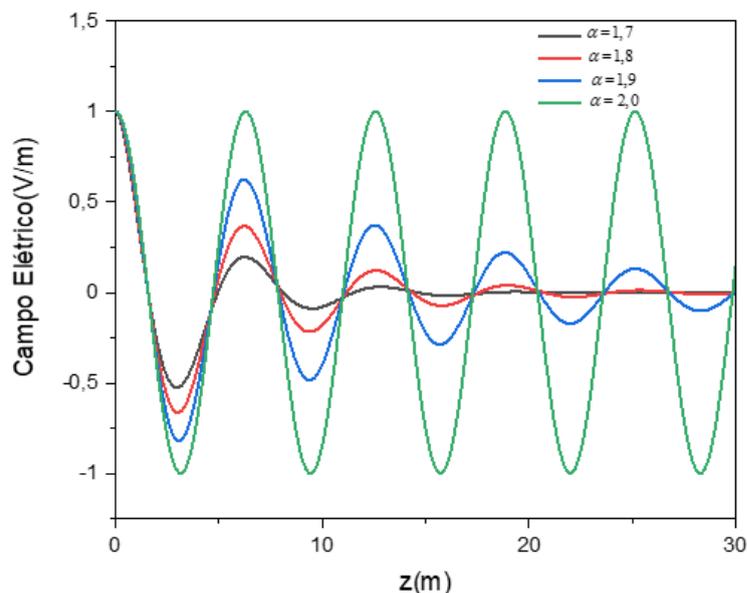
*Fonte: autoria própria*

Pode-se observar que para  $\alpha$  fracionário, no caso  $\alpha = 1.9$ , mostra-se um decaimento na amplitude, lembrando as perdas de energia em meios com condutividade diferente de zero. Para ressaltar esta observação, foi plotado o gráfico campo elétrico em função da posição ( $z$ ) com o  $\alpha$  variando de 1.7 até 2.0. Nestes gráficos, foram fixados os tempos iguais ao período. Desta forma, a equação do campo elétrico se reduz a:

$$E(z) = E_m E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) \quad (208)$$

A Figura 10 mostra o campo elétrico em função da variável  $z$  para  $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$ . Por simplicidade,  $E_m = 1\text{V/m}$ , com os mesmos parâmetros anteriores.

**Figura 10:** Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) para  $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$



*Fonte: autoria própria*

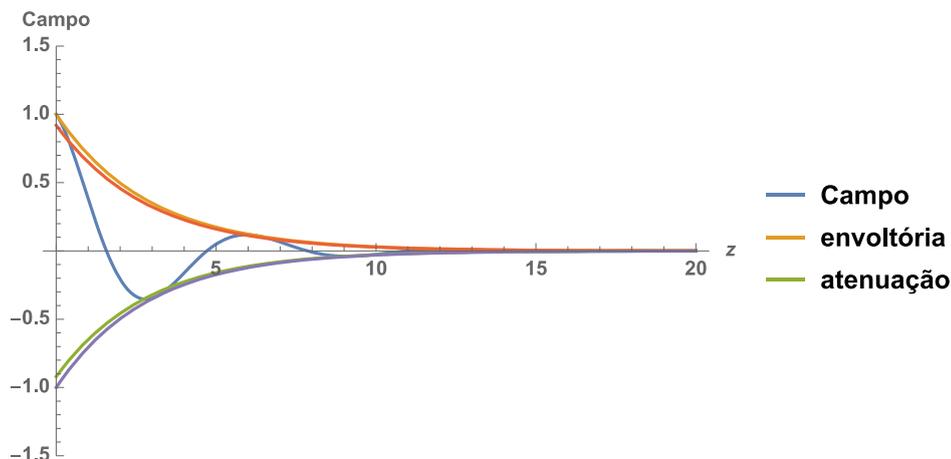
É perceptível que, ao variar o parâmetro  $\alpha$ , o resultado recai nas soluções do amortecimento das ondas em um meio material. Se  $\alpha$  é igual a 2.0, resgata-se a solução da propagação da onda no espaço livre.

Esta atenuação será estudada com mais detalhes na próxima seção.

#### 4.2.1 Envoltória

Segundo (Sadiku, 2012), à medida que os campos elétricos e magnéticos se propagam em um meio condutor, a sua amplitude é atenuada por um fator  $e^{-\gamma z}$ . Nesta seção, será investigado o formato da envoltória do gráfico campo elétrico x posição ( $z$ ), para o caso da modelagem fracionária. Segundo De Castro(1991), “a modulação da amplitude apresentada pela maioria dos livros-texto é, na realidade, a envoltória da curva de oscilação, que, no caso limite de amortecimentos muito pequenos, tendem aos mesmos valores numéricos”. Neste trabalho será utilizada esta aproximação. A diferença entre estas curvas está apresentada na Figura 11.

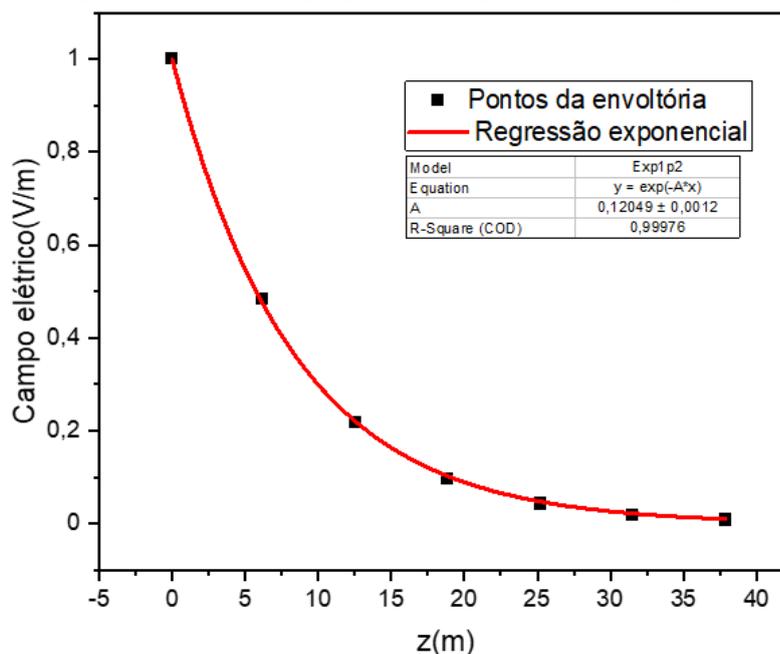
**Figura 11:** Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) apresentando sua envoltória e a atenuação



*Fonte: autoria própria*

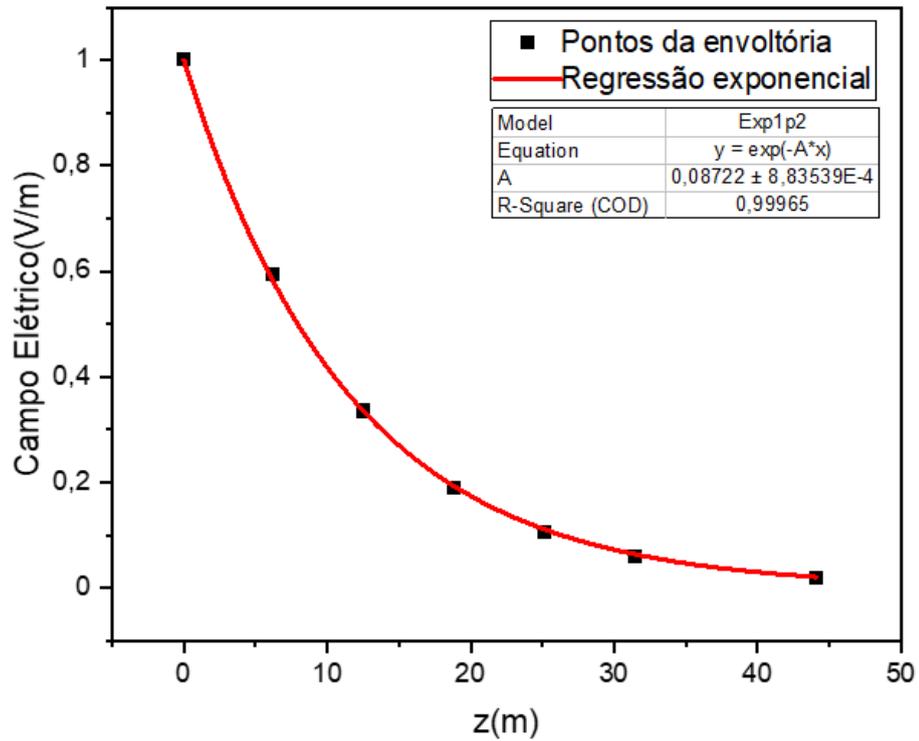
Com esta aproximação, foi determinada a equação da envoltória, pegando os pontos de máximo do campo e plotando estes em um gráfico. Após uma análise do formato da curva, ficou evidente que em todos os casos analisados a melhor curva a ser ajustada era a função exponencial. Nas Figuras 12, 13, 14 e 15 estão exibidas algumas curvas encontradas. Então, uma regressão exponencial foi efetivada em cada caso estudado, obtendo assim todas as funções.

**Figura 12:** Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) para o parâmetro fracionário  $\alpha = 1.85$



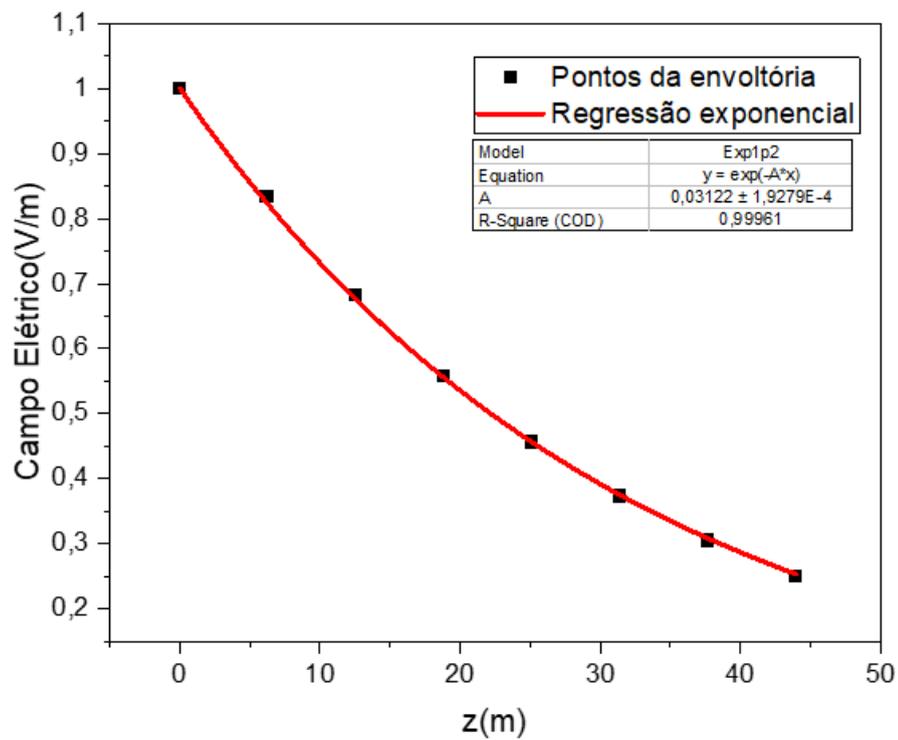
*Fonte: autoria própria*

Figura 13: Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) para o parâmetro fracionário  $\alpha = 1.89$



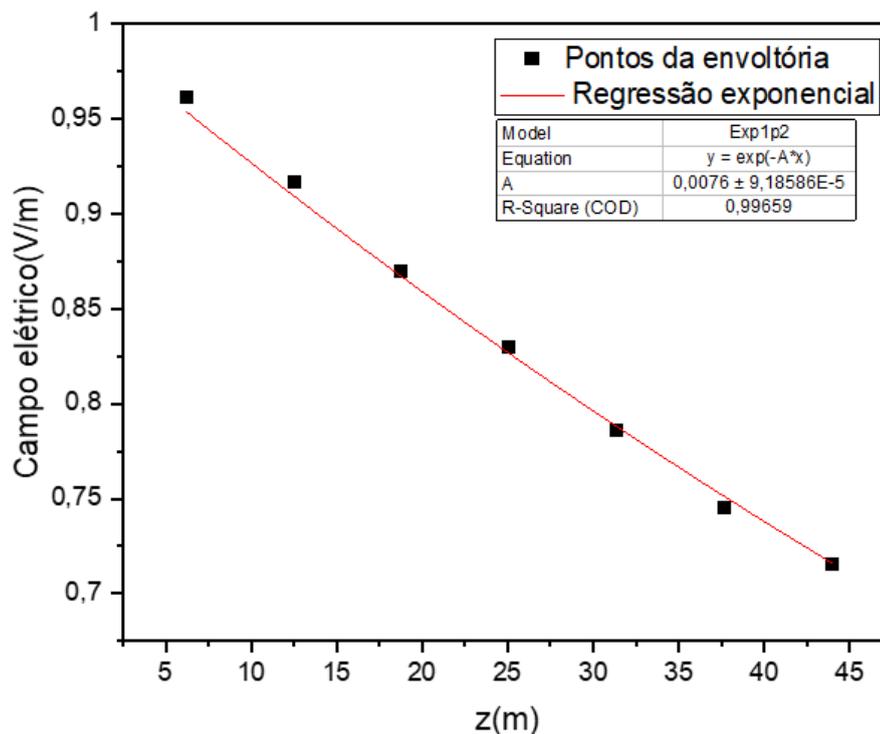
Fonte: autoria própria

Figura 14: Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) para o parâmetro fracionário  $\alpha = 1.96$



Fonte: autoria própria

**Figura 15:** Campo elétrico (V/m) em função de  $z$  (m) para o parâmetro fracionário  $\alpha = 1.99$



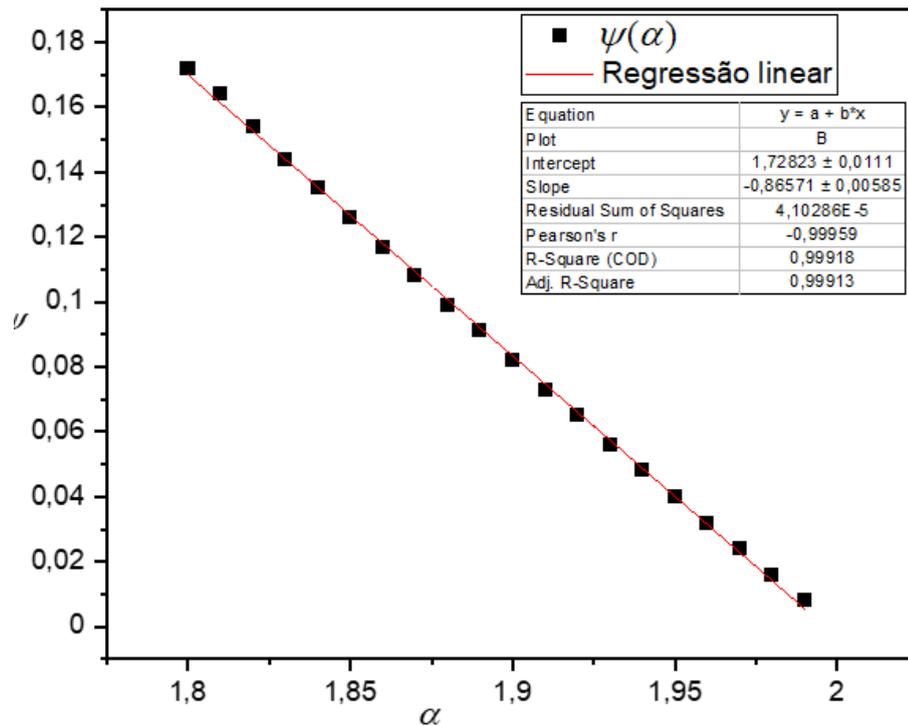
*Fonte: autoria própria*

É possível observar que todos os coeficientes de determinação das regressões são bem altos, evidenciando que todas as curvas obtidas pelas regressões são consistentes. Uma outra observação interessante é que, quando o  $\alpha$  se aproxima de 2, a exponencial se aproxima de uma reta. O que era de se esperar, uma vez que quando o  $\alpha$  é 2 é retomada a função de onda sem perdas, onde a envoltória deve ser uma reta constante.

Estas constatações retomam a ideia anterior em que a envoltória deve ter o formato de  $e^{-\psi z}$ . O  $\psi$  está evidentemente relacionado com os parâmetros do meio, os quais provocam a atenuação da onda. Uma interessante relação linear entre  $\psi$  e  $\alpha$  é encontrada plotando-se o gráfico de dispersão entre estas grandezas, possibilitado a regressão linear entre a variável independente  $\alpha$  e a dependente  $\psi$ . Assim, obtém-se a relação:

$$\psi = -0,8657\alpha + 1,7282 \quad (209)$$

**Figura 16:** Coeficiente do expoente da exponencial em função do parâmetro fracionário da equação (160)



*Fonte: autoria própria*

Nota-se que existe uma relação linear com o coeficiente de determinação de 0,99959. É possível ainda observar que extrapolando-se a reta para  $y = 0$ , resulta  $a = 2$ . Este resultado combina com o que era esperado, pois quando  $a = 2$ , retoma-se a propagação no espaço livre, sem perdas, logo  $y$  tem que ser nulo. Esta seção gerou um artigo denominado de “Um sentido físico para modelagem fracionária: O caso do amortecimento das ondas eletromagnéticas”, na revista brasileira de ensino de física.

#### **4.3 Resultados Numéricos da solução da equação difusão-advecção 3D, estacionária, fracionária**

Para avaliar o desempenho dos modelos desenvolvidos neste estudo, os resultados das simulações serão comparadas com os dados observados nas experiências de Copenhague (um conjunto de dados em 3-D que foram utilizados para obter concentrações na linha central. Estas experiências de dispersão, realizadas em Copenhague e descritas por Gryning e Lyck (1984) e

Gryning et al. (1987) e atualizadas por Gryning e Lyck (1998), consistiram na liberação do hexafluoreto de enxofre traçador (SF6) ao norte de Copenhague. O traçador foi liberado sem empuxo de uma torre com altura de 115 m e foi coletado no nível do solo. As unidades de amostragem foram posicionadas a distâncias de 2-6 km do ponto em que o poluente foi liberado. O comprimento da rugosidade superficial foi de 0,6 m. Os parâmetros que descrevem as condições meteorológicas e as concentrações na linha central durante os experimentos estão resumidos na Tabela 1. Note que a concentração foi normalizada pela taxa de emissão ( $c/Q$ ). O parâmetro  $U_{10}$  representa a velocidade do vento medida a uma altura de 10 m, e o parâmetro  $U_{115}$  representa a velocidade do vento medida a uma altura de 115 m.

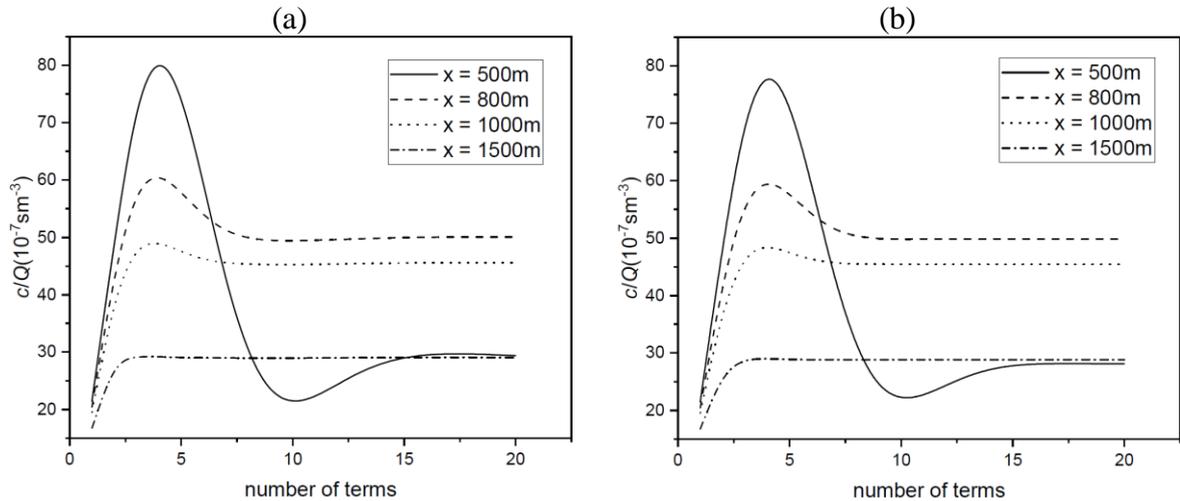
**Tabela 1:** Parâmetros meteorológicos e concentrações observadas durante as experiências de Copenhague.

Exp.	$U_{10}$ (m/s)	$U_{115}$ (m/s)	$h$ (m)	$\sigma_v$ (m/s)	$\sigma_w$ (m/s)	$X$ (m)	$c/Q$ ( $10^{-7}\text{sm}^{-3}$ )
1	2.1	3.4	1980	0.98	0.83	1900	10.50
						3700	2.14
2	4.9	10.6	1920	1.39	1.07	2100	9.85
						4200	2.83
3	2.4	5.0	1120	0.85	0.68	1900	16.33
						3700	7.95
						5400	3.76
4	2.5	4.6	390	0.47	0.47	4000	15.71
5	3.1	6.7	820	0.77	0.71	2100	12.11
						4200	7.24
						5100	4.75
6	7.2	13.2	1300	2.26	1.33	2000	7.44
						4200	3.37
						5900	1.74
7	4.1	7.6	1850	1.61	0.87	2000	9.48
						4100	2.62
						5300	1.15
8	4.2	9.4	810	1.35	0.72	1900	9.76
						3600	2.64
						5300	0.98
9	5.1	10.5	2090	0.71	0.98	2100	8.52
						4200	2.66
						6000	1.98

Como as soluções propostas da equação de avanço-difusão 3-D de ordem fracionária é uma solução em série, um teste de convergência em série é apropriado. A Figura 17 mostra a

convergência numérica das soluções propostas para a concentração ao nível do solo nas distâncias de 500, 800, 1000 e 1500 m em função do número de termos da série, usando a velocidade do vento  $U_{115}$ ,  $\alpha = 0.98$  e  $\varphi = 1$  m.

**Figura 17:** Teste de convergência dos modelos: a) solução usando Caputo; b) solução usando derivadas conformáveis.



*Fonte: autoria própria*

Pode-se observar uma rápida convergência das soluções usando o método LDM. No entanto, para distâncias mais próximas da fonte são necessários mais termos na série. Além disso, nota-se também a semelhança entre as duas soluções devido aos dados de entrada utilizados nas simulações.

A solução via Caputo dada pela Eq. (143) contém a função de Mittag-Leffler e, na solução via conformáveis, dada pela Eq. (156), aparece uma função exponencial. Embora seja conhecido que a função exponencial seja um caso particular da função de Mittag-Leffler ( $\alpha = 1$ ), é interessante uma análise comparativa do comportamento de cada uma delas em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\varphi$ . Para o parâmetro fracionário nas situações físicas típicas o “nível de fractalidade” é baixo, i.e., a ordem das derivadas fracionárias dos termos correspondentes das equações levemente dinâmicas derivadas de um valor inteiro  $n$  (nesse caso  $n = 1$ ) (Tarasov and Zaslavsky, 2006). Para o parâmetro de escala de comprimento  $\varphi$  tem-se a alternativa sugerida no trabalho de He (2018), na qual a estimativa deste parâmetro vem da análise de uma derivada

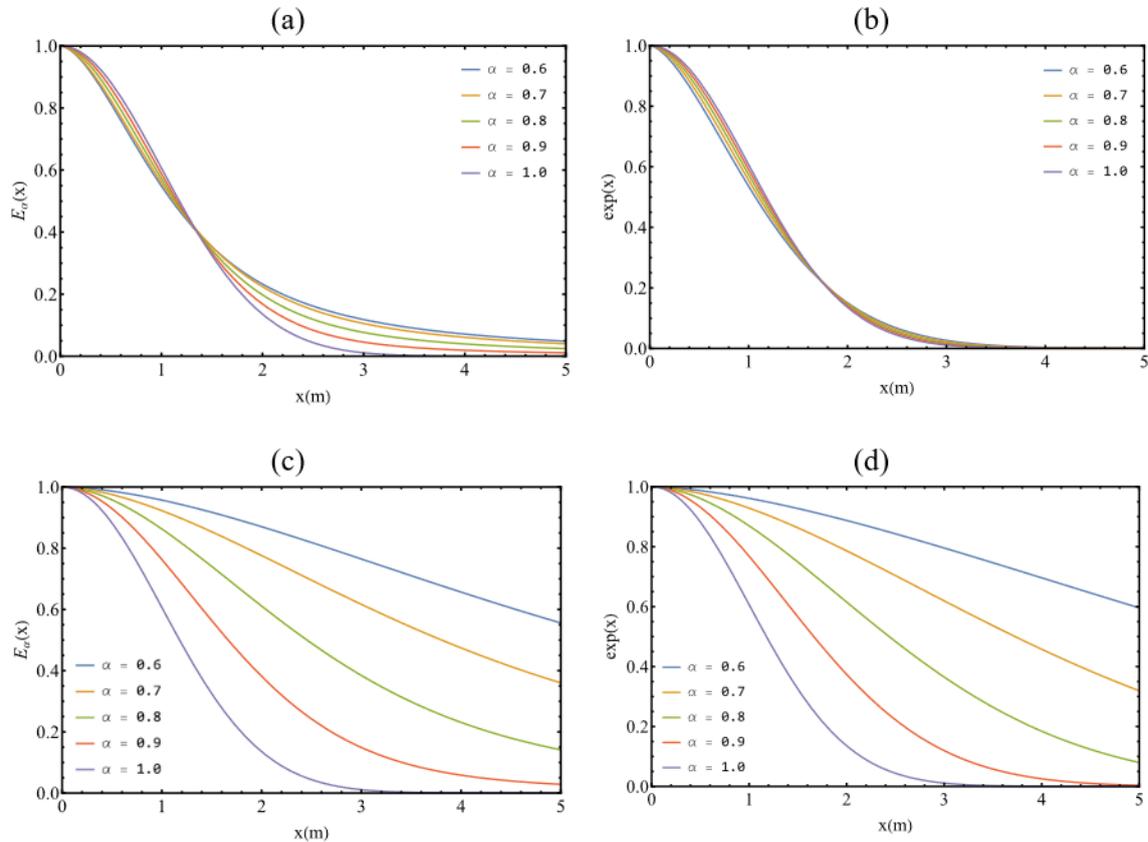
fractal (derivada local), sugerindo uma constante com dimensão de comprimento ( $L$ ) da ordem da menor escala fractal do meio. Assim, apesar de somente a derivada conformável ser uma derivada local, considera-se dois valores para esta constante para uma análise de sua influência: uma com um valor de 1 m (ou muito próximo de 1 m devido a baixa fracionalidade) e  $10^{-3}$  m que representa a menor escala da turbulência na atmosfera (dimensão fractal). De uma macroescala, na qual a energia é fornecida aos vórtices, a uma microescala de Kolmogorov, na qual a energia é dissipada pela viscosidade (Colin et al., 2017). Neste sentido, inicialmente é feita uma análise de sensibilidade dos parâmetros  $\alpha$  e  $\varphi$ , tomando por simplicidade as seguintes equações provenientes das soluções obtidas neste estudo:

$$A1 = E_{\alpha} \left( -\varphi^{1-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} \right) \quad (210)$$

$$A2 = \exp \left( -\varphi^{1-\alpha} \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \right) \quad (211)$$

A Figura 18 mostra o comportamento das funções de Mittag-Leffler (A1) e exponencial (A2) em função da distância da fonte.

**Figura 18.** Comparação entre as funções de Mittag-Leffler (A1) e a exponencial (A2): a) Mittag Leffler com  $\varphi = 1$  m ; b) exponencial com  $\varphi = 1$  m; c) Mittag-Leffler com  $\varphi = 10^{-3}$  m; d) exponencial com  $\varphi = 10^{-3}$  m.

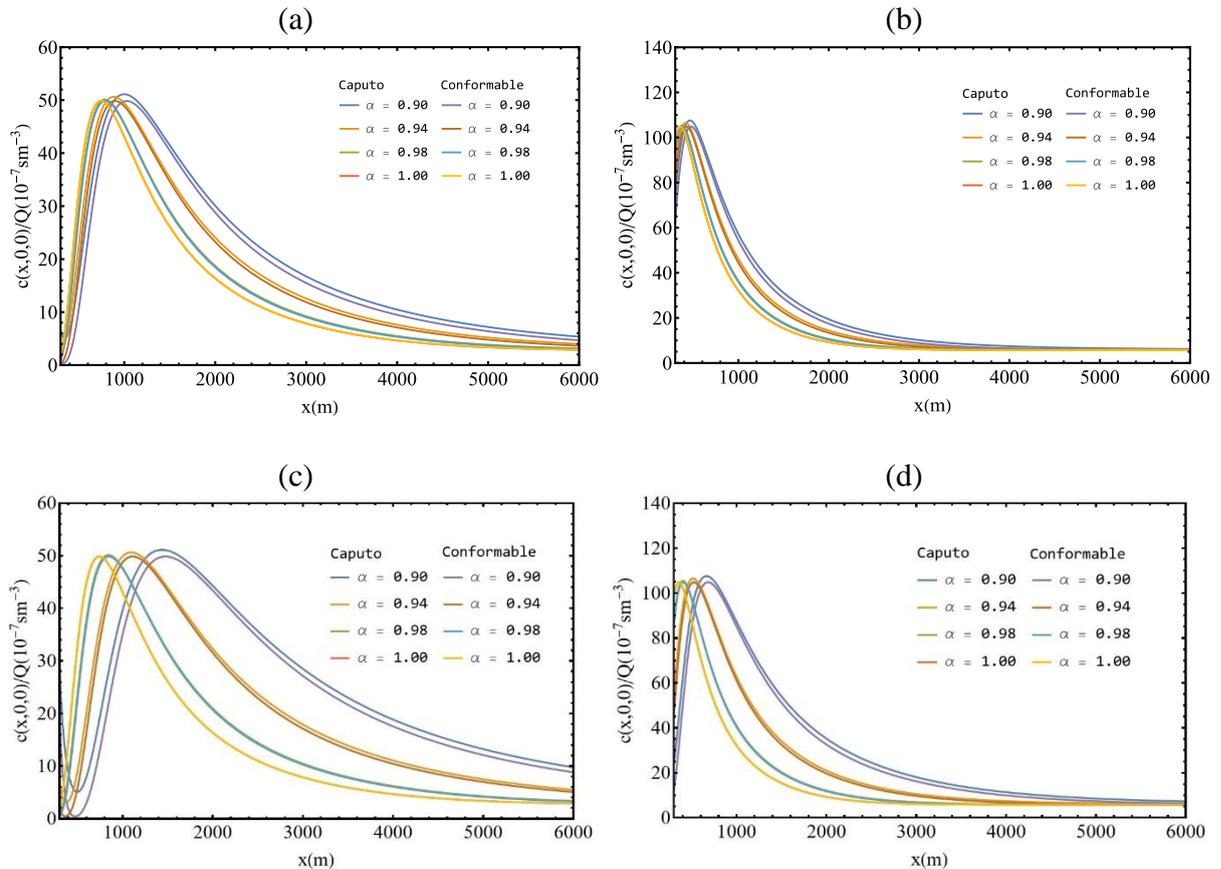


*Fonte: autoria própria*

Em todas as figuras pode-se observar que as soluções tendem a ser idênticas quando o parâmetro fracionário se aproxima da unidade, com um comportamento fisicamente bastante consistente na Fig. (18a) com os voos de Levi (Dos Santos, 2019). As Figuras (18c) e (18d) apresentam um comportamento não consistente para  $\varphi = 10^{-3}$  m com um parâmetro fracionário muito pequeno. No entanto, com valores de  $\alpha$  próximos da unidade o comportamento pode ser representativo (acima de 0.90).

A Figura 19 mostra como as concentrações de poluentes simuladas usando as Eqs. (143) e (156) em função da distância da fonte para diferentes valores do parâmetro fracionário  $\alpha$ , tomando  $\varphi = 1$  m e  $\varphi = 10^{-3}$  m, e velocidades  $U_{10}$  e  $U_{115}$  com dados do experimento de Copenhagen.

**Figura 19:** Concentração em função da distância da fonte para diferentes valores de  $\alpha$ : a)  $\varphi = 1$  m e  $U_{115}$ ; b)  $\varphi = 1$  m e  $U_{10}$ ; c)  $\varphi = 10^{-3}$  m e  $U_{115}$ ; d)  $\varphi = 10^{-3}$  m e  $U_{10}$ .



*Fonte: autoria própria*

Observa-se nas figuras que as soluções são idênticas para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0.98$  (cores sobrepostas), com tendência de afastamento das soluções para valores menores. Salienta-se também que as Figuras (19c) e (19d), as quais usam  $\varphi = 10^{-3}$  m, mostram uma alteração maior na posição do pico de concentração (mas praticamente não alteram o seu valor máximo), sugerindo uma advecção mais intensa. Observa-se também que o pico de concentração é maior para  $U_{10}$ , o que é esperado pois velocidade do vento menor resulta em uma maior concentração. Importante salientar que na Figura (19c), na região próxima a fonte (distâncias menores que 500 m), surgiu um comportamento de crescimento da concentração a medida que decresce a distância da fonte ( $\alpha = 0.90$  e  $\varphi = 10^{-3}$  m), indicando o aparecimento de inconsistências físicas. É importante ressaltar que os experimentos de Copenhagen envolvem medições de concentração em distâncias de aproximadamente 2–6 km, uma faixa dentro da qual há

considerável similaridade no comportamento das curvas para este intervalo, mas com diferenças consideráveis em termos de valores de concentração.

Uma avaliação estatística das simulações realizadas utilizando o modelo e comparadas com os dados experimentais 3-D de Copenhagen, foi realizada para avaliar a influência dos parâmetros e comparar os resultados do modelo com resultados obtidos de outros modelos descritos na literatura. O procedimento de avaliação estatística descrito por Hanna (1989) foi usado e contou com os seguintes parâmetros:

$$\text{NMSE (normalised mean square error)} = \overline{(C_o - C_p)^2} / \overline{C_p C_o},$$

$$\text{FAT2} = \text{fraction of data for which } 0.5 \leq (C_p C_o) \leq 2,$$

$$\text{COR (correlation coefficient)} = \overline{(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})} / \sigma_o \sigma_p,$$

$$\text{FB (fractional bias)} = \overline{C_o} - \overline{C_p} / 0.5(\overline{C_o} + \overline{C_p}), \text{ and}$$

$$\text{FS (fractional standard deviation)} = (\sigma_o - \sigma_p) / 0.5(\sigma_o + \sigma_p)$$

Onde os índices o e p referem-se a quantidades observadas e previstas pelo modelo, respectivamente, e as barras acima dos símbolos indicam valores médios. O parâmetro FB indica se os valores previstos subestimam ou superestimam os valores observados. O parâmetro NMSE reflete a dispersão dos valores previstos em relação à dispersão dos valores medidos. Os melhores resultados são alcançados quando os valores de NMSE, FB e FS estão próximos de zero e os valores de COR e FAT2 estão próximos de um.

Considerando-se que nos experimentos de Copenhagen foram usadas as velocidades do vento medidas em duas alturas distintas, 10 m ( $U_{10}$ ) e 115 m ( $U_{115}$ ), foi possível analisar como as soluções obtidas são influenciadas pela altura em que a velocidade do vento é medida. Neste sentido, as Tabelas 2 e 3 a seguir mostram uma avaliação estatística utilizando-se as Eqs. (143) e (156), respectivamente, para diferentes valores do parâmetro fracionário  $\alpha$ , considerando-se

o parâmetro dimensional  $\varphi = 10^{-3}$  m e  $\varphi = 1$  m e velocidades do vento  $U_{10}$  e  $U_{115}$ .

**Tabela 2:** Índices estatísticos para a solução via Caputo.

	Eq. (30)	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$U_{115}$ $\varphi = 10^{-3}$ m	$\alpha = 1.00$	0.11	0.90	0.91	0.09	0.14
	$\alpha = 0.99$	0.10	0.90	0.91	0.02	0.00
	$\alpha = 0.98$	0.12	0.90	0.83	-0.13	-0.11
	$\alpha = 0.97$	0.18	0.90	0.83	-0.24	-0.23
	$\alpha = 0.96$	0.28	0.91	0.78	-0.35	-0.33
	$\alpha = 0.95$	0.41	0.91	0.78	-0.46	-0.43
	$\alpha = 0.94$	0.56	0.91	0.65	-0.56	-0.53
	$\alpha = 0.93$	0.75	0.92	0.61	-0.65	-0.61
	$\alpha = 0.92$	0.96	0.92	0.39	-0.74	-0.69
	$\alpha = 0.91$	1.19	0.93	0.22	-0.82	-0.76
	$\alpha = 0.90$	1.44	0.93	0.04	-0.89	-0.82
$U_{10}$ $\varphi = 10^{-3}$ m	$\alpha = 1.00$	0.22	0.87	0.91	0.19	0.43
	$\alpha = 0.99$	0.16	0.89	0.91	0.13	0.38
	$\alpha = 0.98$	0.11	0.91	0.87	0.06	0.32
	$\alpha = 0.97$	0.09	0.92	0.83	-0.03	0.24
	$\alpha = 0.96$	0.08	0.93	0.83	-0.11	0.12
	$\alpha = 0.95$	0.10	0.92	0.83	-0.19	0.01
	$\alpha = 0.94$	0.16	0.93	0.83	-0.29	-0.11
	$\alpha = 0.93$	0.25	0.93	0.78	-0.39	-0.24
	$\alpha = 0.92$	0.39	0.92	0.70	-0.49	-0.37
	$\alpha = 0.91$	0.57	0.92	0.56	-0.59	-0.49
	$\alpha = 0.90$	0.80	0.92	0.56	-0.69	-0.61
$U_{115}$ $\varphi = 1$ m	$\alpha = 1.00$	0.11	0.90	0.91	0.09	0.14
	$\alpha = 0.99$	0.10	0.90	0.91	0.03	0.07
	$\alpha = 0.98$	0.10	0.90	0.91	-0.03	0.00
	$\alpha = 0.97$	0.11	0.90	0.87	-0.09	-0.06
	$\alpha = 0.96$	0.13	0.90	0.82	-0.15	-0.12
	$\alpha = 0.95$	0.16	0.90	0.82	-0.22	-0.18
	$\alpha = 0.94$	0.20	0.91	0.82	-0.28	-0.24
	$\alpha = 0.93$	0.25	0.91	0.82	-0.34	-0.30
	$\alpha = 0.92$	0.31	0.91	0.78	-0.39	-0.35
	$\alpha = 0.91$	0.38	0.92	0.78	-0.45	-0.41
	$\alpha = 0.90$	0.46	0.92	0.74	-0.50	-0.46
$U_{10}$ $\varphi = 1$ m	$\alpha = 1.00$	0.22	0.87	0.91	0.19	0.43
	$\alpha = 0.99$	0.19	0.88	0.91	0.16	0.41
	$\alpha = 0.98$	0.15	0.89	0.91	0.11	0.38
	$\alpha = 0.97$	0.13	0.90	0.87	0.08	0.33
	$\alpha = 0.96$	0.10	0.91	0.83	0.03	0.29
	$\alpha = 0.95$	0.09	0.92	0.83	-0.01	0.24
	$\alpha = 0.94$	0.08	0.92	0.83	-0.06	0.19
	$\alpha = 0.93$	0.10	0.91	0.78	-0.13	0.16
	$\alpha = 0.92$	0.09	0.92	0.83	-0.14	0.15
	$\alpha = 0.91$	0.10	0.93	0.83	-0.21	0.01
	$\alpha = 0.90$	0.13	0.93	0.83	-0.26	-0.05

**Tabela 3:** Índices estatísticos para a solução via derivada conformável.

	Eq (43)	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$U_{115}$ $\varphi = 10^{-3}$ m	$\alpha = 1.00$	0.11	0.90	0.91	0.09	0.14
	$\alpha = 0.99$	0.10	0.90	0.91	-0.01	0.02
	$\alpha = 0.98$	0.12	0.90	0.87	-0.11	-0.01
	$\alpha = 0.97$	0.17	0.90	0.83	-0.22	-0.21
	$\alpha = 0.96$	0.26	0.90	0.83	-0.32	-0.31
	$\alpha = 0.95$	0.37	0.90	0.78	-0.42	-0.41
	$\alpha = 0.94$	0.51	0.91	0.70	-0.52	-0.51
	$\alpha = 0.93$	0.69	0.91	0.61	-0.61	-0.59
	$\alpha = 0.92$	0.88	0.92	0.52	-0.70	-0.67
	$\alpha = 0.91$	1.09	0.92	0.30	-0.78	-0.74
$\alpha = 0.90$	1.32	0.93	0.22	-0.85	-0.80	
$U_{10}$ $\varphi = 10^{-3}$ m	$\alpha = 1.00$	0.22	0.87	0.91	0.19	0.43
	$\alpha = 0.99$	0.17	0.89	0.91	0.14	0.40
	$\alpha = 0.98$	0.13	0.91	0.87	0.08	0.34
	$\alpha = 0.97$	0.09	0.92	0.83	0.01	0.27
	$\alpha = 0.96$	0.08	0.92	0.83	-0.06	0.18
	$\alpha = 0.95$	0.08	0.92	0.83	-0.14	0.07
	$\alpha = 0.94$	0.12	0.92	0.83	-0.23	-0.04
	$\alpha = 0.93$	0.19	0.92	0.83	-0.32	-0.17
	$\alpha = 0.92$	0.30	0.92	0.78	-0.42	-0.29
	$\alpha = 0.91$	0.44	0.91	0.70	-0.51	-0.42
$\alpha = 0.90$	0.63	0.91	0.61	-0.61	-0.54	
$U_{115}$ $\varphi = 1$ m	$\alpha = 1.00$	0.11	0.90	0.91	0.09	0.14
	$\alpha = 0.99$	0.10	0.90	0.91	0.04	0.08
	$\alpha = 0.98$	0.10	0.90	0.91	-0.01	0.02
	$\alpha = 0.97$	0.10	0.90	0.87	-0.06	-0.04
	$\alpha = 0.96$	0.12	0.90	0.83	-0.12	-0.10
	$\alpha = 0.95$	0.14	0.90	0.83	-0.17	-0.16
	$\alpha = 0.94$	0.17	0.90	0.83	-0.23	-0.21
	$\alpha = 0.93$	0.21	0.90	0.83	-0.28	-0.26
	$\alpha = 0.92$	0.26	0.90	0.83	-0.33	-0.32
	$\alpha = 0.91$	0.32	0.91	0.78	-0.38	-0.37
$\alpha = 0.90$	0.38	0.91	0.78	-0.44	-0.42	
$U_{10}$ $\varphi = 1$ m	$\alpha = 1.00$	0.22	0.87	0.91	0.19	0.43
	$\alpha = 0.99$	0.19	0.87	0.91	0.16	0.41
	$\alpha = 0.98$	0.17	0.89	0.91	0.14	0.39
	$\alpha = 0.97$	0.15	0.90	0.91	0.11	0.37
	$\alpha = 0.96$	0.12	0.91	0.87	0.07	0.34
	$\alpha = 0.95$	0.11	0.91	0.83	0.04	0.31
	$\alpha = 0.94$	0.09	0.92	0.83	0.00	0.27
	$\alpha = 0.93$	0.08	0.92	0.83	-0.03	0.22
	$\alpha = 0.92$	0.08	0.92	0.83	-0.07	0.17
	$\alpha = 0.91$	0.08	0.92	0.83	-0.11	0.12
$\alpha = 0.90$	0.09	0.92	0.83	-0.16	0.07	

Para a solução via Caputo dada pela Eq. (133), as simulações com  $U_{115}$ ,  $\varphi = 1$  m e  $\alpha = 0.98$  conseguiram obter os melhores resultados estatísticos. Por outro lado, usando as derivadas conformáveis dada pela Eq. (146) com  $U_{115}$ ,  $\varphi = 10^{-3}$  m e  $\alpha = 0.99$  os resultados são muito

similares. Os piores resultados são obtidos para uma velocidade do vento de  $U_{10}$  e  $U_{115}$  quando usam  $\varphi = 10^{-3}$  m em ambas as soluções, apresentando uma tendência de diminuir rapidamente o valor do FAT2 com o decréscimo do parâmetro fracionário  $\alpha$ . No entanto, para valores de  $\alpha$  próximos da unidade os resultados são comparáveis.

Os resultados obtidos com outros modelos são apresentados para comparação. O modelo 2 é a técnica multicamada de difusão-advecção integral generalizada (GIADMT) com difusividades de vórtice dependente das variáveis  $x$  e  $z$  (turbulência não homogênea na direção vertical), mas usando uma média para a difusividade de vórtice na direção  $x$  e uma velocidade do vento  $U$  com um perfil de similaridade (Costa et al., 2006). O modelo 3 é a técnica da transformada de Laplace integral generalizada (GILTT) (Moreira et al., 2009), também com difusividade de redemoinho que é dependente da direção vertical  $z$  mas com uma função gaussiana aplicada na direção  $y$  (o parâmetro de dispersão lateral utilizado vem da teoria estatística de Taylor e é dependente da altura do PBL,  $h$ , e da velocidade convectiva) e com um perfil de velocidade do vento  $U$  seguindo uma lei de potência. O Modelo 4 é uma combinação dos métodos GITT e LDM para obter a solução analítica da equação de advecção-difusão fracionada 3D (Moreira et al., 2019).

**Table 4:** Valores dos parâmetros obtidos na avaliação estatística dos modelos considerados.

	Dispersion model	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
Model 1 ( $U_{115}$ )	Full LDM (Caputo)	0.10	0.90	0.91	-	0.00
	Full LDM (Conformable)	0.10	0.90	0.91	0.03 - 0.01	0.01
Model 2 ( $U$ similarity)	GIADMT (Costa et al., 2006)	0.15	0.87	0.96	0.01	0.09
Model 3 ( $U$ power law)	GILTT (Moreira et al., 2009)	0.33	0.80	0.87	0.28	0.09
Model 4 ( $U_{10}$ )	GITT + LDM (Moreira et al., 2019)	0.08	0.94	0.96	- 0.01	- 0.11

A tabela 4 mostra que o modelo proposto neste artigo (Modelo 1: Full LDM) e o Modelo 4 apresentam seus melhores resultados, em relação aos outros modelos mais complexos

considerados, para  $\alpha = 0.98$  e  $U_{115}$  e para  $\alpha = 0.95$  e  $U_{10}$ , respectivamente (ambos usando  $\varphi = 1$  m). Para esses valores, o Modelo 4 produz o NMSE mais baixo (0.08) e o FAT2 mais alto (0.96), e o NMSE do Modelo 1 (0.10) e FAT 2 (0.91). Estatisticamente, os modelos 1 e 4 são muito similares. O fato de os parâmetros físicos não dependerem explicitamente da variável  $z$ , que é influenciada pela superfície da terra, não afeta o método de solução proposto, pois a variação compensa a falta de turbulência não homogênea na direção vertical. e são modelos mais complexos em relação à sua base subjacente e implementação computacional. O modelo proposto nesse artigo é mais simples e de fácil implementação, e sua natureza analítica explícita de seus parâmetros físicos.

# Capítulo 5

## 5.1 Conclusões:

Neste trabalho, a modelagem fracionária para equações diferenciais, foi aplicada a problemas de geociências. A eficiência e a aplicabilidade foram verificadas de forma simples, porém em importantes problemas da área. Gradativamente, esta modelagem foi sendo testada e problemas como a localidade e a dimensão foram discutidos e soluções foram apresentadas. Também uma comparação entre dois métodos de resolução para as equações diferenciais: i) Caputo; ii) Conformáveis, foram comparados e conclusões importantes foram descritas.

No primeiro caso (o problema da fonte pontual), a existência de uma região de convergência mais rápida foi observada para situações em que a distância entre o ponto de medição e a fonte do campo magnético era muito maior do que a profundidade da água ( $r \gg z$ ). Este fato deve-se a condição inicial, pois para  $r = 0$  o campo magnético ( $H$ ) tende ao infinito. Para este caso, duas situações foram resolvidas: (i) resistividade constante, e (ii) resistividade, variando com a profundidade. Ambas as situações foram resolvidas analiticamente, mostrando a eficiência do método LDM. Além disso, a sensibilidade aos parâmetros  $a$  e  $b$  foram investigados, e a influência desses nas soluções foi claramente observada.

No segundo caso (o problema da onda plana, que é um problema básico, no qual muitos métodos eletromagnéticos são espelhados), a série obtida possuía uma solução fechada. Ao modelar a equação de ordem inteira, a solução da série converge para uma função exponencial, e a modelagem fracionária para a função Mittag-Leffler, o que é intrínseco aos problemas de cálculo fracionário. A utilização de modelagem fracionária em geofísica abre muitas possibilidades para novas pesquisas em torno dos problemas de inversão, com o potencial de alcançar uma melhor compreensão da sensibilidade dos parâmetros.

Neste ponto, é importante mencionar que o Método de Decomposição de Adomian

Modificado é uma ferramenta poderosa que é capaz de lidar com equações diferenciais parciais fracionárias não lineares. Neste trabalho, pela primeira vez, este método foi aplicado com sucesso a equações geofísicas básicas. Isto foi notado, uma vez que o esquema encontrou as soluções sem qualquer discretização ou suposições restritivas, além de que estava livre de erros de arredondamento.

Já no terceiro caso, observa-se nos resultados que se pode obter uma solução mais geral, utilizando-se a modelagem fracionária. Em alguns trabalhos, as soluções com a modelagem inteira e a modelagem fracionária já foram confrontadas. Neste trabalho, foi utilizada a onda eletromagnética, mas qualquer fenômeno que recaia em uma equação diferencial pode ser modelada desta forma. Uma relação entre os parâmetros do meio com o  $\alpha$  da equação diferencial pode ser determinada. Esta relação pode ser utilizada para uma possível análise de composição do meio, trazendo assim, com no capítulo 4, um reforço para a nova possibilidade de problemas em inversão, presentes em todos os ramos da ciência, tais como geofísica, medicina, física, química e engenharias.

Para continuação desta investigação, pode-se procurar também uma relação entre o  $b$  (número de onda) e o  $\gamma$ , que representa o expoente da exponencial responsável pelo amortecimento. Desta forma, é estabelecido uma expressão mais geral para o expoente de amortecimento da onda eletromagnética. Além disso, uma melhoria na modelagem pode ser acrescentada em trabalhos futuros, já que quando é feita a modelagem fracionária surge um problema de dimensão. Importante dizer que na modelagem fracionária o expoente fracionário foi colocado somente na derivada, como é feito na maioria dos trabalhos da literatura, sendo que isso faz permanecer a relação  $\omega = \beta c$ , mantendo a possibilidade de todas as sugestões de valores deste trabalho.

Para o caso da equação difusão e advecção, este trabalho propôs resolver analiticamente a

equação de difusão-advecção 3D fracionária (steady state) utilizando o método LDM, considerando a definição de derivada fracionária de Caputo e a derivada conformável. A derivada conformável transforma uma derivada fracionária em uma derivada de ordem inteira, a qual, diferentemente das derivadas fracionárias tradicionais, obedece a todas as regras tradicionais do cálculo. Do ponto de vista teórico, esta transformação perde o caráter não-local (efeito de memória) introduzido pela derivada fracionária, o qual normalmente é introduzido nos problemas atmosféricos no coeficiente de difusão dependente da distância da fonte, mas tem o ganho da introdução de um parâmetro fracionário na equação e obediência as bem conhecidas regras do cálculo tradicional.

As soluções obtidas não são idênticas, sendo que a proveniente da derivada de Caputo (não-local) é representada pela função de Mittag-Leffler, intrínseca as derivadas fracionárias, e a proveniente da derivada Conformável (local) gera uma função exponencial. As duas soluções só são idênticas quando for de ordem inteira ( $\alpha = 1$ ). Considerando-se o tradicional experimento de Copenhagen, o qual é considerado moderadamente convectivo, percebe-se que as concentrações dos poluentes coletados ao nível do solo não apresentaram diferenças significativas com a utilização de ambas as soluções propostas neste estudo em condições de baixa fracionalidade, ou seja, para valores próximos da unidade. Da mesma forma, a constante de dimensionalidade se torna importante somente quando a solução perde a sua baixa fracionalidade, ou seja, valores pequenos do parâmetro fracionário, podendo ser usada a dimensão de 1 m para a constante de dimensionalidade  $\varphi$ , sem perda de generalidade.

No futuro, pretende-se obter a solução da equação de advecção-difusão com parâmetros fracionários em termos difusivos, tendo em mente que a modelagem fracionária generaliza o processo de solução e que até recentemente não seria possível utilizá-la na solução de problemas práticos de engenharia e física atmosférica.

## 5.2. Referências

- Abdelhakim, A.A. and Machado, J.A.T., 2019. A critical analysis of the conformable derivative. *Nonlinear Dyn* 95, 3063–3073.
- Abdelhakim, A.A., 2019. The flaw in the conformable calculus: It is conformable because it is not fractional. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 22(2), 242-254.
- Abel, N.H., 1823. Oplosning af et par opgaver ved hjælp af bestemte integraller. *Magazin for Naturvidenskaberne*, Aargang I, Bind 2, Christiania, 1823. (Translation to French: N.H. Abel, Solution de quelques probl`emes `a l'aide d'int`egrales d'efinies. In: "Oeuvres compl`etes de Niels Henrik Abel. Nouvelle edition", Edited by L. Sylow and S. Lie, Grondahl & Son, Christiania, 1881, Chapter II, pp. 11–27).
- Acioli, P.S., Xavier, F.A., Moreira, D.M., 2019. Mathematical model using fractional derivatives applied to the dispersion of pollutants in the planetary boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology* 170(2), 285-304.
- Adomian, G., 1991. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, *Comput. Math. Appl.* 21(5), 101–127.
- Adomian, G., 1994. Solving frontier problems of physics: the decomposition method, With a preface by Yves Cherruault. *Fundamental Theories of Physics*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1.
- Albani, R.A.S., Duda, F.P., Pimentel, L.C.G., 2015. On the modeling of atmospheric pollutant dispersion during a diurnal cycle: A finite element study. *Atmospheric Environment* 118, 19-27.
- Anderson, D.R., Camrud, E., Ulness, D.J., 2019. On the nature of the conformable derivative and its applications to physics. *Journal of Fractional Calculus and Applications* 10(2), 92-135.
- Banerjee, B., B. J. Sengupta, and B. P. Pal, 1980a, Apparent resistivity of a multilayered earth with a layer having exponentiality varying conductivity: *Geophysical Prospecting*, 28, 435–452, doi: 10.1111/j.1365-2478.1980.tb01237.x.

- Banerjee, B., B. J. Sengupta, and B. P. Pal, 1980b, Resistivity sounding on a multilayered earth containing transition layers: *Geophysical Prospecting*, 28, 750–758, doi: 10.1111/j.1365-2478.1980.tb01258.x.
- Bueler, E., Lingle, C., Kallen-Brown, J., Covey, D. and Bowman, L., 2005. Exact solutions and verification of numerical models for isothermal ice sheets. *Journal of Glaciology* 51(173), 291-306.
- Butera, S. and Paola, M., 2014. A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry. *Annals of Physics* 350, 146-158.
- Camargo, R.F., 2009. Cálculo fracionário e aplicações, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, pp. 183.
- Caputo, M., 1967. Linear Models of Dissipation whose  $Q$  is almost Frequency Independent-II. *Geophysical Journal International* 13(5), 529–539.
- Chaladgarn, T., & Yooyuanyong, S. (2013). Mathematical model of magnetometric resistivity sounding for a conductive host with a bulge overburden. *Applied Mathematical Sciences*, 7(7), 335-348.
- Chen, J. and Oldenburg, D.W., 2004. Magnetic and electric fields of direct currents in a layered earth. *Exploration Geophysics* 35, 157–163.
- Chock, David P; Sun, Pu; Winkler, Sandra L. Trajectory-grid: An accurate sign-preserving advection-diffusion approach for air quality modeling. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 30, n. 6, p. 857–868, 1996.
- Chung, W., 2015. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.* 290, 150–158.
- Colin, C., Massion, V., Paci, A., 2017. Adaptation of the meteorological model Meso-NH to laboratory experiments: implementations and validation. *Geoscientific Model Development Discussions*, 1-32.
- Costa, C.P., Vilhena, M.T., Moreira, D.M., Tirabassi, T., 2006. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary

- layer. *Atmospheric Environment* 40(29), 5659-5669.
- Cotta, R.M., 1993. *Integral transforms in computational heat and fluid flow*. CRC Press, 352pp.
- D. Moreira, P. Xavier, A. Palmeira e E. Nascimento, *Int. J. Heat Mass Transf.* 144, 118667 (2019).
- Danielson, Eric William; LEVIN, James; ABRAMS, Elliot. *Meteorology*. McGraw-Hill, 2003.
- De Castro, Antonio S. *Uma nota de esclarecimento sobre o oscilador harmônico amortecido*. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 8, n. 2, p. 137-143, 1991.
- Debnath, L., (2003). Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 54, 3413-3442.
- Dos Santos, M.A., 2019. Mittag-leffler memory kernel in Lévy flights. *Mathematics* 7(9), 766.
- Dugowson, S. (1994). *Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de la dérivation* (Doctoral dissertation, Paris 13).
- Ebaid, A., Masaedeh, B., El-Zahar, E., 2017. A new fractional model for the falling body problem. *Chinese Physics Letters* 34(2), 020201.
- Ebaid, A., Masaedeh, B., El-Zahar, E., 2017. A new fractional model for the falling body problem. *Chinese Physics Letters* 34(2), 020201.
- Edwards, R.N. and Howell, E.C., 1976. A field test of the magnetometric resistivity (MMR) method. *Geophysics* 41, 1170–1183.
- Edwards, R.N., 1974. The magnetometric resistivity method and its application to the mapping of a fault. *Can. J. Earth Sci.* 11, 1136–1156.
- Edwards, R.N., 1988. A downhole magnetometric resistivity technique for electrical sounding beneath a conductive surface layer. *Geophys. Prosp.* 53, 528–536.
- Edwards, R.N., Lee, H. and Nabighian, M.N., 1978. On the theory of magnetometric resistivity (MMR) methods. *Geophysics* 43(6), 1176–1203.
- Essa, K.S., Etman, S.M., Embaby, M., 2007. New analytical solution of the dispersion equation. *Atmospheric Research* 84(4), 337-344.
- F.G. Rodrigues e E.C. de Oliveira. *Rev. Bras. Ens. Fís.* 37, 3305-1 (2015).
- Garcia, J.R., Calderon, M.G., Ortiz, J.M., Baleanu, D., 2013. Motion of a particle in a resisting

- medium using fractional calculus approach. *Proceedings of the Romanian Academy Series A - Mathematics Physics Technical Sciences Information Science* 14, 42-47.
- Ghorbani, Asghar. Toward a new analytical method for solving nonlinear fractional differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 49-50, p. 4173–4179, 2008.
- Gomez-Aguilar, J.F., Miranda-Hernandez, M., Lopez-Lopez, M.G., Alavrado-Martinez, V.M., Baleanu, D., 2016. Modeling and simulation of the fractional space-time diffusion equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 30, 115-127.
- Gorenflo, R. and Mainardi, F., 2009. Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 229(2), 400-415.
- Goulart, A. G. O., Lazo, M. J., Suarez, J. M. S., & Moreira, D. M. (2017). Fractional derivative models for atmospheric dispersion of pollutants. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 477, 9-19.
- Gryning, S.E. and Lyck, E., 1984. Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *Journal of Climate and Applied Meteorology* 23(4), 651-660.
- Gryning, S.E. and Lyck, E., 2002. The Copenhagen tracer experiments: Reporting of measurements. *Risø-R-1054*, 74pp.
- Gryning, S.E., Holtslag, A.A.M., Irwin, J.S., Sivertsen, B., 1987. Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters. *Atmospheric Environment* 21(1), 79-89.
- Guerrero, J.P., Pimentel, L.C.G., Oliveira-Júnior, J.F., Heilbron Filho, P.F.L., Ulke, A.G., 2012. A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation. *Atmospheric Environment* 55, 201-212.
- Hadlock, Charles R. *Mathematical modeling in the environment*. American Mathematical Soc., 2020.
- He, J., 2018. Fractal calculus and its geometrical explanation. *Results in Physics* 10, 272-276.

- Hedin, A. E. A revised thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data: MSIS-83. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, v. 88, n. A12, p. 10170-10188, 1983.
- Holton, James (Ed.). *The dynamic meteorology of the stratosphere and mesosphere*. Springer, 2016.
- Huebner, Kenneth H et al. *The finite element method for engineers*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. 744 p.
- Hussain, M.; Khan, Majid. *Modified Laplace Decomposition Method*. *Applied Mathematical Sciences*, v. 4, n. 36, p. 1769-1783, 2010.
- I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, 1999), v. 198.
- Jumarie, Guy. Fourier's transform of fractional order via Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative. *J. Appl. Math. Inform*, v. 26, n. 5-6, p. 1101-1121, 2008.
- Kaplan, M. and Akbulut, A., 2018. Application of two different algorithms to the approximate long water wave equation with conformable fractional derivative. *Arab Journal of Basic and Applied Sciences* 25(2), 1-8.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 264, 65-70.
- Khuri, S.A., 2001. A Laplace decomposition algorithm applied to class of nonlinear differential equations. *J. Math. Appl.* 1, 141-155.
- Kim, H., and K. Lee, 1996, Response of a multilayered earth with layers having exponentially varying resistivities: *Geophysics*, 61, 180–191, doi: 10.1190/1.1443938.
- Meerschaert, M.M., and Tadjeran, C., 2004. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172(1), 65-77.
- Morales-Delgado, V. F., Gómez-Aguilar, J. F., & Taneco-Hernandez, M. A. (2018). Analytical solutions of electrical circuits described by fractional conformable derivatives in Liouville-Caputo sense. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 85, 108-117.

- Moreira, D. and Moret, M., 2018. A new direction in the atmospheric pollutant dispersion inside the planetary boundary layer. *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 57(1), 185-192.
- Moreira, D. M., Vilhena, M. T., Buske, D., & Tirabassi, T. (2009). The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmospheric Research*, 92(1), 1-17.
- Moreira, D.M. and Santos, C.A.G., 2019. New approach to handle gas-particle transformation in air pollution modelling using fractional derivatives. *Atmospheric Pollution Research* 10(5), 1577-1587.
- Moreira, D.M. and Vilhena, M.T., 2009. Air pollution and turbulence: modelling and applications. Boca Raton, CRC Press, pp. 354.
- Moreira, D.M., Moraes, A.C., Goulart, A.G., Albuquerque, T.T., 2014. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance. *Atmospheric Environment* 83, 254-259.
- Moreira, D.M., Tirabassi, T., Carvalho, J.C., 2005a. Plume dispersion simulation in low wind conditions in stable and convective boundary layers. *Atmospheric Environment* 39(20), 3643-3650.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Buske, D., Tirabassi, T., 2009. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmospheric Research* 92(1), 1-17.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Tirabassi, T., Buske, D., Cotta, R., 2005b. Near-source atmospheric pollutant dispersion using the new GILTT method. *Atmospheric Environment* 39(34), 6289-6294.
- Moreira, D.M., Xavier, P., Palmeira, A., Nascimento, E.G.S., 2019. New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 144, 118667.
- Moreira, Davidson et al. New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 144, p. 118667, 2019.
- Moreira, DM et al. The giltt solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous

- and nonstationary pbl. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 40, n. 17, p. 3186–3194, 2006b.
- Muñoz-Ruiz, M.L., Parés, C., Russo, G., 2021. Recent advances in numerical methods for hyperbolic PDE systems. Springer, 269pp.
- Oldham K.B. and Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York- London, 234pp.
- Palmeira, A., Xavier, P., Moreira, D.M., 2019. Simulation of atmospheric pollutant dispersion considering a bi-flux process and fractional derivative. *Atmospheric Pollution Research* 11, 57-66.
- Pasquill, F. and Smith, F.B., 1983. *Atmospheric Diffusion*. Wiley, New York.
- Pimentel, L.C.G., Pérez Guerrero, J.S., Ulke, A.G., Duda, F.P., Heilbron Filho, P.F.L., 2014.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional differential equations*. Academic Press, 340pp.
- Podlubny, I., Magin, R.L., Trymorush, I., 2017. Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 20(5), 1068-1075.
- Prates, J.H.S. and Moreira, D.M, 2020b. Um sentido físico para modelagem fracionária: O caso do amortecimento das ondas eletromagnéticas. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 42, e20200363.
- Prates, J.H.S. and Moreira, D.M., 2020a. Fractional derivatives in geophysical modelling: approaches using the modified Adomian decomposition method. *Pure and Applied Geophysics* 177, 4309-4323.
- Raghuwanshi, S., and B. Singh, 1986, Resistivity sounding on a horizontally stratified multi-layered earth: *Geophysical Prospecting*, 34, 409–423, doi:m 10.1111/j.1365-2478.1986.tb00474.x.
- Reitz, John R.; Milford, Frederick J.; Christy, Robert W.(1982), *Fundamentos da teoria eletromagnética*, Rio de Janeiro, Editora Campus, Terceira edição.
- Rizza, U et al. Development of a grid-dispersion model in a large-eddy-simulation– generated planetary boundary layer. *Il nuovo cimento C, Societa italiana di fisica*, v. 26, n. 3, p. 297–309, 2003.

- Rosales, J.J., Filoteo, J.D., González, A., 2018. A comparative analysis of the RC circuit with local and non-local fractional derivatives. *Revista Mexicana de Física* 64(6), 647-654.
- Ross, B., 1974. Fractional calculus and its applications. Proceedings of the International Conference, New Haven, June, Springer Verlag, New York, 386pp.
- Ross, Bertram. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, v. 4, n. 1, p. 75-89, 1977.
- Sadiku, Matthew N. O.(2012), *Elementos de eletromagnetismo*, Porto Alegre, Editora Bookman, quinta edição.
- Sato, H. K., 2000, Potential field from a DC current source arbitrarily located in a nonuniform layered medium: *Geophysics*, 65, 1726–1732, doi: 10.1190/1.1444857.
- Schumer, R., Meerschaert, M.M., Baeumer, B., 2009. Fractional advection-dispersion equations for modeling transport at the Earth surface. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 114(4), F00A07.
- Seinfeld, J.H., 1986. *Atmospheric Chemistry and Physics of Air Pollution*. Wiley, New York.
- Sharan, M. and Modani, M., 2006. A two-dimensional analytical model for the dispersion of air-pollutants in the atmosphere with a capping inversion. *Atmospheric Environment* 40(19), 3479-3489.
- Sharan, Maithili; Kansa, EJ; Gupta, Suman. Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 84, n. 2-3, p. 275–302, 1997.
- Silva, F.S., Moreira, D.M., Gonçalves, M.A.M.S., 2018. Conformable Laplace transform of fractional differential equations. *AXIOMS* 7(3), 55.
- Sripanya, W. (2011). Mathematical solutions of electric potential and magnetic field reponse from heterogeneous media (Doctoral dissertation, มหาวิทยาลัย ศิลปากร).
- Stefanescu, S.S., 1929. Theoretical studies of electrical prospecting of the subsurface, *Studii Technice si Economica, Academie de la Republique Populaire Roumaine*, 14(1) (in French).

- Stoyer, C. H., and J. R. Wait, 1977, Resistivity probing of an “exponential” earth with a homogeneous overburden: *Geoexploration*, 15, 11–18, doi: 10.1016/0016-7142(77)90003-5.
- Stull, Roland B. *An introduction to boundary layer meteorology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- Tarasov, V.E. and Zaslavsky, G.M., 2006. Dynamics with low-level fractionality. *Physica A* 368 399–415.
- Tarasov, V.E., 2018. No nonlocality. No fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 62, 157–163.
- US Centennial Commission et al. Geometric altitude vs. temperature, pressure, density, and the speed of sound derived from the 1962 US Standard Atmosphere.
- Valério, Duarte; Machado, José; Kiryakova, Virginia. Some pioneers of the applications of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 17, n. 2, p. 552-578, 2014.
- Venkat Ratnam, M.; Patra, A. K.; Krishna Murthy, B. V. Tropical mesopause: Is it always close to 100 km. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, v. 115, n. D6, 2010.
- Wazwaz, A.M., 2002. *Partial differential equations: methods and applications*. Balkema Publisher, 476pp.
- West, B.J., 2014. Colloquium: Fractional calculus view of complexity: A tutorial. *Rev. Mod. Phys.* 86(4), 1169-1186.
- Xavier, P.H.F., Nascimento, E.G.S., Moreira, D.M., 2019. A model using fractional derivatives with vertical eddy diffusivity depending on the source distance applied to the dispersion of atmospheric pollutants. *Pure and Applied Geophysics* 176(4), 1797-1806.
- Yokuş, A., 2018. Comparison of Caputo and conformable derivatives for time-fractional Korteweg–de Vries equation via the finite difference method. *International Journal of Modern Physics B* 32(29), 1850365.
- Younas, U., Younis, M., Seadawy, A.R., Rizvi, S.T.R., Althobaiti, S., Sayed, S., 2021. Diverse exact solutions for modified nonlinear Schrödinger equation with conformable fractional derivative. *Results in Physics* 20, 103766.

Zaslavsky, G.M., 1994. Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 76(1-3), 110-122.

Zhou, H. W., Yang, S., & Zhang, S. Q. (2018). Conformable derivative approach to anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491, 1001-1013.

Zienkiewicz, OC; Taylor, RL. *The finite element method*, Butterworth Heinemann. [S.l.]: Oxford, 2000. 1440 p.