

Sistema FIEB



CENTRO UNIVERSITÁRIO SENAI CIMATEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL
Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

Tese de Doutorado

**MODELAGEM DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE FOKKER-
PLANCK PARA ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DE RAIOS-
X ORIUNDAS DE SISTEMAS BINÁRIOS UTILIZANDO O
MÉTODO DE ADOMIAN**

Apresentada por: Melina Silva de Lima

Orientador: Dr. Marcelo A. Moret

Co-orientador: Dr. Davidson Martins Moreira

Outubro
2021

Melina Silva de Lima

**MODELAGEM DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE FOKKER-
PLANCK PARA ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DE RAIOS-
X ORIUNDAS DE SISTEMAS BINÁRIOS UTILIZANDO O
MÉTODO DE ADOMIAN**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Curso de Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do SENAI CIMATEC, como requisito para a obtenção título de Doutora em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial.

Área de conhecimento: Interdisciplinar

Orientador: Dr. Marcelo A. Moret

Co-orientador: Dr. Davidson Martins Moreira

SENAI CIMATEC

Salvador-Ba
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Centro Universitário SENAI CIMATEC

L732m Lima, Melina Silva de

Modelagem da equação não-linear de Fokker-Planck para análise das séries temporais de raios-x oriundas de sistemas binários utilizando o método de Adomian / Melina Silva de Lima. – Salvador, 2022.

147 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves.
Coorientador: Prof. Dr. Davidson Martins Moreira.

Tese (Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial) – Programa de Pós-Graduação, Centro Universitário SENAI CIMATEC, Salvador, 2022.

Inclui referências.

1. Sistemas astrofísicos. 2. Termoestatística. 3. Satélite Rossi X-ray. 4. Fokker-Planck 5. Método de Adomian. I. Centro Universitário SENAI CIMATEC. II. Gonçalves, Marcelo Albano Moret Simões. III. Moreira, Davidson Martins. IV. Título.

CDD 620.00113

Nota sobre o estilo do PPGMCTI

O texto desta tese foi elaborado considerando as normas de estilo (i.e. estéticas e estruturais) propostas e aprovadas pelo colegiado do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial e estão disponíveis em formato eletrônico (download na Página Web <http://ead.fieb.org.br/portal/faculdades/dissertacoes-teses-mcti.html> ou solicitação via e-mail na secretaria do programa) e em formato impresso somente para consulta.

Ressalta-se que o formato proposto considera diversos itens das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), entretanto opta-se, em alguns aspectos, seguir um estilo próprio elaborado e amadurecido pelos professores do programa de pós-graduação supracitado.

“Seria, na minha opinião, um infortúnio para a ciência caso a teoria dos gases fosse simplesmente esquecida em função da atitude litigiosa que contra ela hoje predomina... quão impotente uma única pessoa é contra a corrente vigente bem o sei. E ainda, naquilo que estiver ao alcance das minhas forças, faço aqui a minha contribuição retomando os aspectos mais difíceis e polêmicos da teoria dos gases, para que um dia, ao retornarem a ela, não seja necessário descobrir tudo novamente”.

*Ludwig Eduard Boltzmann
(20/2/1844 - 5/9/1906)*

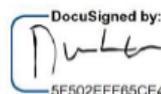
ATA DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE MELINA SILVA DE LIMA, CANDIDATA AO GRAU DE DOUTORA EM MODELAGEM COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL.

Aos dezessete dias do mês de fevereiro de dois mil vinte e dois, às quatorze horas, via remota no Centro Universitário SENAI CIMATEC, localizada na Avenida Orlando Gomes, nº 1845, Piatã, nesta capital, reuniu-se em solenidade pública a Comissão formada pelos professores: Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves, Dr. Davidson Martins Moreira, Dr. Renelson Ribeiro Sampaio, Dr. Roberto Luiz Souza Monteiro, Dr. José Roberto de Araujo Fontoura e Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira para examinar a discente Melina Silva de Lima, candidata ao grau de Doutora em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial. O Professor Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves, orientador da aluna, presidiu os trabalhos e deu início a solenidade proferindo algumas palavras aos presentes e apresentando a Banca Examinadora. Em seguida passou a palavra à doutoranda para que dissertasse oral e sucintamente a respeito do tema “MODELAGEM DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE FOKKER-PLANCK PARA ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DE RAIOS-X ORIUNDAS DE SISTEMAS BINÁRIOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ADOMIAN”. Passando a discorrer sobre o aludido tema, dentro do prazo legal, o candidato foi, a seguir, arguida pelos examinadores, na forma regimental. Ato contínuo passou então a Banca, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do referido trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito APROVADA, o qual foi proclamado pela presidência da Banca Examinadora, perante assistência, logo que retomaram ao recinto da solenidade. Face à aprovação, declarou a presidência achar-se a examinada legalmente habilitada a receber o grau de Doutora em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, cabendo ao Centro Universitário SENAI CIMATEC, providenciar, como de direito, o Diploma que o mesmo faz jus. O postulante está ciente que seu trabalho é público e que será disponibilizado na CAPES para divulgação. Nada mais havendo a declarar, o presidente deu por encerrada a sessão, da qual eu, Michela de Andrade Fernandes, Secretária Acadêmica do Centro Universitário SENAI CIMATEC, lavrei a presente Ata que, após lida e aprovada, assino com os demais componentes da Banca Examinadora.

ATA DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE MELINA SILVA DE LIMA, CANDIDATA AO GRAU DE DOUTORA EM MODELAGEM COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL.

DocuSigned by:


Prof. Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves
Orientador

DocuSigned by:


Prof. Dr. Davidson Martins Moreira
Coorientador

DocuSigned by:



Prof. Dr. Renelson Ribeiro Sampaio
Membro Interno

DocuSigned by:



Prof. Dr. Roberto Luiz Souza Monteiro
Membro Interno

DocuSigned by:



Prof. Dr. José Roberto de Araujo Fontoura
Membro Externo

DocuSigned by:



Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira
Membro Externo

DocuSigned by:



Sr.ª Michela de Andrade Fernandes
Secretária Acadêmica do Centro Universitário

Resumo

A evolução dos satélites artificiais têm proporcionado a existência de equipamentos astronômicos embarcados, a exemplo, de observatórios específicos em faixas espectroscópicas finas, por exemplo no espectro de raios-X, de forma a poder observar com mais precisão objetos astrofísicos, tais como os denominados sistemas binários de raios-X, que são objetos astronômicos cujas forças gravitacionais são de longo alcance e fazem parte dos sistemas auto-gravitantes (SGS). Nestes, a termoestatística convencional de Boltzman e Gibbs não é adequada para a mensuração de parâmetros físicos, devido ao seu caráter aditivo, sendo sugerido o formalismo termoestatístico de Tsallis. Neste cenário tem-se como objetivo geral da pesquisa legitimar o modelo de difusão de raios-X através de modelagem da equação de Fokker-Planck, adotando o método iterativo e analítico de George Adomian, usando como condições de contorno hipóteses lastreadas nas séries espectrais de raios-X advindos de sistemas astrofísicos binários estelares; e, como objetivos específicos: a) Caracterizar a fractalidade da difusão de raios-X nas XRBSs; b) Modelar a difusão dos raios-X nas regiões vizinhas á XRBSs; e, c) Resolver analiticamente a equação de Fokker-Planck utilizando-se do método de Adomian. Para consolidar estes objetivos adota-se uma metodologia lastreada em revisão de literatura, de cunho documental, histórico com modelagem de tais sistemas com o uso da equação não linear de Fokker-Planck e a sua solução iterativa e analítica com o método de Adomian e com o uso de condições de contorno adequadas aos dados coletados do Satélite Rossi (X-ray). Alguns resultados são apresentados e referem-se às 156 distribuições de intensidade de raios-X advindos das XRBS com perfil de distribuições de cauda longa (q-gaussianas tsallianas) com valores de coeficientes (q) que corroboram características da termoestatística de Tsallis bem como a abrangência do efeito memória associado indicando forte correlação com a existência de propriedades fractais no processo difusivo. É possível e recomendada a expansão para pesquisas similares em outras XRBSs como meio de generalizar as características da difusão de raios-X e também de ondas eletromagnéticas de outras frequências, oriundas de objetos astronômicos similares.

Palavras-chave: Sistemas Astrofísicos. Termoestatística. Satélite Rossi X-ray. Fokker-Planck. Método de Adomian.

Abstract

The evolution of artificial satellites has provided the existence of on-board astronomical equipment, for example, specific observatories in thin spectroscopic bands, for example in the X-ray spectrum, in order to be able to observe with more precision astrophysical objects, such as the so-called systems X-ray binaries, which are astronomical objects, gravitational facades are long-range and are part of self-gravitating systems (SGS). In these, a conventional thermostatics of Boltzman and Gibbs is not suitable for the measurement of physical parameters, due to its additive character, being suggested the thermostatic formalism of Tsallis. In this scenario, the general objective of the research is to legitimize the X-ray diffusion model through the modeling of the Fokker-Planck equation, adopting the iterative and analytical method of George Adomian, using as boundary conditions hypotheses based on the spectral series of X-rays from binary astrophysical stellar systems; and, as specific objectives: a) Characterize the fractality of X-ray scattering in XRBSs; b) Model the X-ray scattering in regions neighboring the XRBSs; and, c) Analytically solve the Fokker-Planck equation using the Adomian method. To consolidate these objectives, a methodology based on a literature review, documental, historical was adopted with modeling of such systems using the nonlinear Fokker-Planck equation and its iterative and analytical solution with the Adomian method and with the use of boundary conditions to data collected from the Rossi Satellite (X-ray). Some results are important and fit the 156 X-ray intensity distributions coming from the XRBS with long tail distributions profile (tsallian q-Gaussian) with coefficient values (q) that corroborate the characteristics of the Tsallis thermostatics as well as the scope of the memory effect associated with the strong correlation with the existence of fractal properties in the diffusive process. It is possible and recommended to expand to similar researches in other XRBSs as a means to generalize the characteristics of X-ray scattering and also electromagnetic waves of other frequencies, originating from similar astronomical objects.

Keywords: Astrophysical Systems. Thermostatics. Rossi X-ray satellite. Fokker-Planck. Adomian Method.

Lista de Siglas

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas;
- ANOVA - Análise de Variância;
- CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas;
- CNO - Ciclo de Carbono, Nitrogênio e Oxigênio;
- EFP - Equações de Fokker-Planck;
- FP - Fokker-Planck;
- ASM - All-Sky Monitor;
- GTS - Formalismo termoestatístico de Tsallis;
- IF/UFRN - Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte;
- INMET - Instituto Nacional de Meteorologia;
- INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais;
- MEBG - Mecânica estatística de Boltzmann e Gibbs;
- QED - *Quod erat demonstrandum*;
- RXTE-ASM - Satélite Rossi X-ray;
- SENAI CIMATEC - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial e Centro Integrado de Manufatura e Tecnologia;
- SGS - Sistemas auto-gravitantes;
- SGS - Sistemas auto-gravitantes;
- UFBA - Universidade Federal da Bahia;
- XRBS - Sistemas Binários de raios-X;

Lista de Quadros

Quadro 1 Características dos sistemas complexos.....	41
Quadro 2 Aditividade e extensividade	42
Quadro 3 Formas de aproximar uma função.....	46
Quadro 4 Itinerário metodológico	64
Quadro 5 Ensembles considerados na análise	83

Lista de Gráficos

Gráfico 1 Curva de emissão de raios-X ajustada: resultados modelados para o XRBS GX1+4 (em azul) e uma distribuição Gaussiana (vermelho).	13
Gráfico 2 Órbita relativa aparente do sistema Alpha-Centaury.	29
Gráfico 3 Condição inicial linear	85
Gráfico 4 Solução exata da EFP com termos restaurador e difusivos constantes	86
Gráfico 5 Condição inicial em decaimento exponencial normalizado.....	89
Gráfico 6 Solução da EPF com decaimento exponencial normalizado	90
Gráfico 7 Condição inicial linear	95
Gráfico 8 Solução da EPF fracionária de Caputo (α) com termo restaurador linear negativo e termo difusivo constante condições iniciais linear	96
Gráfico 9 Condição inicial de comportamento q-gaussiano	98
Gráfico 10 Solução da EPF fracionária de Caputo (α) e com condição inicial q-gaussiana	98
Gráfico 11 Solução da EPF de Caputo com termo restaurado inversamente proporcional à distância, termo difusivo linear e com condição inicial q-gaussiana	101
Gráfico 12 Distribuição gaussiana em comparação com a q-gaussiana	103
Gráfico 13 Relação entre q x Sq	106
Gráfico 14 Relação entre q x D	107
Gráfico 15 Relação entre a q-entropia e a difusão	108

Lista de Figuras

Figura 1 Espectros das estrelas por classe espectral, graficados com uma Lei de Planck de temperatura indicada, de 3000 Å a 18 000 Å.....	19
Figura 2 Imagem de Sírius A e sua companheira, uma anã branca, à direita	21
Figura 3 Imagem da Nebulosa Planetária M57 (software Aladin Sky Atlas)	23
Figura 4 Imagem da Nebulosa do Caranguejo (NGC 1952), utilizando o software Aladin.....	25
Figura 5 Título e trecho do artigo de John Michell de 1783, que descreveu pela primeira vez o conceito de um buraco negro no Philosophical Transactions, da Royal Society of London.	26
Figura 6 Diagrama HR	33
Figura 7 Postulados para a função entropia.....	42
Figura 8 The All-Sky Monitor	55
Figura 9 The All-Sky Monitor	56
Figura 10 Itinerário metodológico	65
Figura 11 Lóbulo de Roche	104

Sumário

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Contexto em que se insere a pesquisa	10
1.2 Objetivos	13
1.2.1 Objetivo geral	13
1.2.2 Objetivos específicos	14
1.3 Hipótese da pesquisa	14
1.4 Questão norteadora	14
1.5 Justificativa do trabalho	14
1.6 Estrutura da tese	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 Ondas Eletromagnéticas e espectro de raios-X	18
2.2 Tipos de Estrelas e algumas considerações das origens dos XRBSs	20
2.3 As estrelas binárias e suas classificações	27
2.4 Evolução estelar e estrelas Binárias de Raios-X	31
2.5 Difusão	34
2.5.1 Conceitos e definições	34
2.5.2 Acreção e Difusão em Estrelas Binárias	35
2.6 A Mecânica Estatística de Tsallis e o processo de difusão de raios-X	36
2.6.1 A Mecânica Estatística clássica e seu conceito de entropia	37
2.6.2 Postulados e hipóteses	38
2.6.3 A mecânica estatística e a não extensividade	40
2.7 A equação de Fokker-Planck: origens e dedução	43
2.7.1 Conceitos e origens	43
2.7.2 Dinâmica da EFP	44
2.7.3 Consideração para obtenção da EFP	45
2.7.4 A truncagem da série expandida	48
2.7.5 Generalização da EFP	52
3 METODOLOGIA	54
3.1 Classificação metodológica	54
3.2 Universo de pesquisa: X-Ray Timing Explorer (RXTE) e as XRBSs	55
3.3 Homotopia e a Decomposição de Adomian	59
3.4 Itinerário metodológico	63
3.5 O método da decomposição de Adomian (ADM)	66
3.5.1 Aplicações e algoritmo de modelagem	66
3.5.2 A série de Taylor generalizada e os polinômios de Adomian	67
3.6 Aplicando o método de Adomian na EFP	70
3.6.1 Modelagem e identificação dos operadores	70
3.6.2 O cálculo genérico dos polinômios de Adomian	74
3.6.3 As regras de geração dos polinômios de Adomian	75
4 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK COM O MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN	80
4.1 Considerações iniciais ao uso da EFP em sistemas estelares	80
4.2 Termo restaurador e difusivo constantes e termo estacionário linear	84
4.3 EFP com propostas hiperbólicas para a emissão, expansão e decaimento	86
4.4 EFP com taxas unitárias e com condição inicial com decaimento exponencial	88

4.5 EFP com taxas unitárias e com decaimento exponencial ajustável	90
4.6 EFP fracionária no tempo com a derivação fracionária de Caputo (α).....	92
4.7 EFP fracionária de Caputo (α) e comportamento de uma q-gaussiana.	96
4.8 EFP fracionária no tempo com efeito memória de Caputo (α) e condição inicial q-gaussiana	99
5 DISCUSSÃO DAS HIPÓTESES PROSPECTADAS E ASPECTOS FÍSICOS DA EJEÇÃO DE RAIOS-X EM XRBS	102
5.1 Justificativas para as condições iniciais q-gaussianas.....	102
5.2 O Lóbulo de Roche de Potencial Gravitacional para o caso das XRBSs.....	103
5.3 Forças eletromagnéticas de tensão	105
5.4 Dispersões e projeções da q-entropia.....	106
5.5 Índices entrópicos das XRBSs	109
5.6 Comparativos dos resultados das hipóteses modeladas	110
6 COMENTÁRIOS FINAIS	114
6.1 Considerações finais.....	114
6.2 Recomendações para prospecções futuras.....	115
APÊNDICE A - Cálculos Estimados dos Coeficientes de Difusão dos Pares Binários	124
APÊNDICE B - Soluções Editadas do Wolfram Mathematica 12.1	130

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto em que se insere a pesquisa

O século XX foi de fundamental importância para a astronomia e a astrofísica estelar. Observações fotométricas e espectroscópicas revelaram propriedades estelares cuja compreensão só se obteve a partir de estudos teóricos mais recentes. Dentre algumas informações mais atuais está o fato de que mais de 50% das estrelas fazem parte de sistemas múltiplos, principalmente sistemas binários (OSORIO, 2009).

Exceto para as binárias visuais, os sistemas estelares binários são compostos por duas estrelas que orbitam em torno de um mesmo centro de massa, devido a uma interação gravitacional mútua (OSORIO, 2009). Estas são de grande importância por nos permitirem deduzir parâmetros estelares importantes, tais como o raio, temperatura superficial, massa, períodos de rotação, entre outros. Entre as estrelas binárias encontram-se aquelas com emissão de raios-X.

A primeira detecção de raios-X fora de nosso sistema solar ocorreu em 1962 e foi feita por contadores *Geiser* que estavam a bordo do foguete *Aerobee* (GIACCONI *et al.*, 1962). A fonte de emissão foi denominada *Scorpius X-1*, um sistema binário com emissão de raios-X (XRBS), composto por uma estrela de nêutrons e sua companheira, *V818 Scorpii* (SKIPPER, 2015).

Um XRBS consiste em um objeto compacto (um buraco negro ou uma estrela de nêutrons) e uma estrela menos massiva, denominada de secundária (SKIPPER, 2015). As XRBS, assim como os sistemas astrofísicos mais relevantes do Universo (estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, entre outros), fazem parte do grupo de objetos astronômicos cujas forças gravitacionais de longo alcance formam estruturas únicas no Universo, denominadas sistemas auto-gravitantes (SGS) (MORET *et al.*, 2010; Jr ROSA; JESUS; MORET, 2013).

Nestas estruturas as propriedades da termoestatística convencional de Boltzman (1844-1906) e Gibbs (1839-1903), válida para sistemas aditivos, não são adequadas e esbarram em problemas diversos, como, por exemplo, o fato destas estruturas não serem isotérmicas, exibindo estados de equilíbrio incompletos caracterizados por propriedades de escala (MORET *et al.*, 2010). Assim, o Formalismo Termostático de Tsallis (GTS) (TSALLIS, 1988) tem sido sugerido e utilizado com melhores resultados. A GTS cobre esta classe de sistemas, uma vez que postula uma entropia não aditiva, s_q (MORET *et al.*, 2010), tal qual mostrada na Eq. (1) (TSALLIS, 1988). A não aditividade e, em alguns caso, a não extensividade do SGS, se reflete, por exemplo, nas suas interações de longo alcance (MORET *et al.*, 2010), sendo que nestas últimas, a entropia é aditiva, o que não corresponde ao fenômeno aqui tratado.

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B) \quad (1)$$

Supondo que as curvas de luz de emissão raios-X das XRBS podem ser analisadas segundo um viés tsalliano, esta pesquisa foca na análise e denominação de parâmetros específicos que expliquem matematica e estatisticamente as emissões de raios-X advindas das XRBS, conforme já registrado, em resultados preliminares (LIMA; MORET, 2015; LIMA; MORET, 2016).

Os dados de emissão foram coletados pelo instrumento All Sky Monitor, acoplado ao satélite *Rossi X-ray* (RXTE-ASM) e estão disponíveis em http://xte.mit.edu/ASM_lc.html.

Pressupondo que as curvas analisadas correspondentes às séries temporais dos valores de emissão de raios-X advindos de XRBS podem ser modeladas por uma equação de Fokker-Planck não linear, que é assim denominada por Adriaan Fokker e Max Karl Ernest Ludwig Planck, e que também é conhecida como equação avançada de Kolmogórov, assim denominada previamente, em 1931, por Andréi Kolmogórov, e que descreve a evolução temporal da função de densidade de probabilidade, em posição e a velocidade, de um sistema físico, conforme a Eq. (2), e que tem como solução do estado estacionário uma distribuição de intensidade q-gaussiana, tal qual os dados fornecidos pelo satélite *Rossi X-ray*, e conhecendo os

valores de emissão, é possível ajustar os resultados para uma q-gaussiana Eq. (2) no sentido de prever o comportamento de novos dados.

$$D \frac{dP_q(x)}{dx} + K_{nl}(x)P_q(x) = \frac{dP_q}{dt} \quad (2)$$

Onde D é o coeficiente relacionado à difusão. No caso específico das XRBS, a hipótese é de que ele esteja relacionado à difusão das partículas no disco de acreção no lóbulo de Roche¹ e nas calotas polares. Por outro lado, k pode estar associado ao potencial gravitacional das partículas em relação à estrela de nêutron ou buraco negro no centro do disco de acreção.

Como no estado estacionário,

$$\frac{dP_q}{dt} = 0 \quad (3)$$

Tendo como solução

$$P_q = A[1 - k(1 - q)(x - x_0)^2]^{1/(1-q)} \quad (4)$$

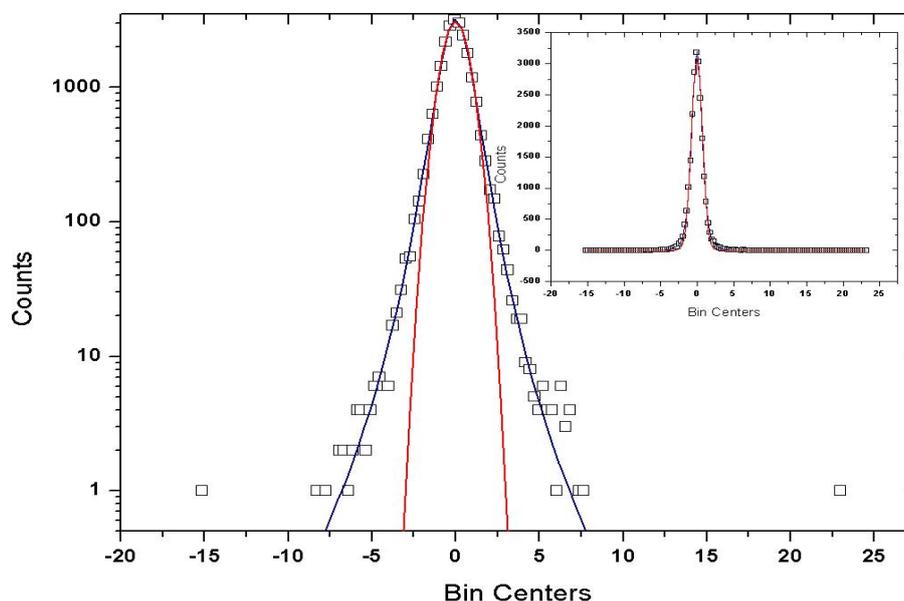
Um exemplo de curva ajustada encontra-se na Figura 1, que evidencia as duas curvas, a q-gaussiana (azul) e a gaussiana (vermelho) ajustadas aos valores de emissão de raios-X de uma XRBS, com parâmetros $q=1,39\pm 0,01$, $k=1,20\pm 0,01$ e $A=3200,32\pm 6,06$.

Pela análise de variância (ANOVA)², $F_{\text{value}}=140297$ com $\text{Prob}>F = 0$. Em todas as nossas análises, a q-gaussiana mostrou-se melhor ajustável aos pontos. Por outro lado, a gaussiana não se ajustou tão bem, como podemos ver a partir do Gráfico 1 e pela análise ANOVA.

¹ Em um sistema binário, próximo ao centro de cada uma das estrelas, as superfícies equipotenciais são praticamente esféricas. A deformação equipotencial é proporcional à distância ao centro da estrela. Essa proporcionalidade ocorre até que as duas superfícies equipotenciais se encontrem em um ponto onde as forças se anulam. Tal superfície é denominada superfície crítica de Roche (MADEJSKY, 2014).

² A Análise de Variância (ANOVA) é um procedimento utilizado para comparar três ou mais tratamentos. Existem muitas variações da ANOVA devido aos diferentes tipos de experimentos que podem ser realizados.

Gráfico 1 Curva de emissão de raios-X ajustada: resultados modelados para o XRBS GX1+4 (em azul) e uma distribuição Gaussiana (vermelho).



Fonte: (LIMA; MORET, 2016).

No Gráfico 1, mostra-se um exemplo de distribuição de uma XRBS, cujos resultados modelados mostram uma q-gaussiana e uma gaussiana como curvas de melhor ajuste aos pontos. É fácil perceber o melhor ajuste dado à q-gaussiana, o que demonstra seu caráter tsalliano, ao passo que nos permite modelar os dados determinando valores específicos do parâmetro q , verificados nesta pesquisa.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, os objetivos, geral e específicos, estão descritos a seguir.

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa é legitimar o modelo de difusão de raios-X através de modelagem da equação de Fokker-Planck, adotando o método iterativo e analítico de George Adomian, usando como condições de contorno hipóteses lastreadas nas séries espectrais de raios-X advindos de sistemas astrofísicos binários estelares.

1.2.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos:

- Caracterizar a fractalidade da difusão de raios-X nas XRBSs;
- Modelar a difusão dos raios-X nas regiões vizinhas á XRBSs;
- Resolver analiticamente a equação de Fokker-Planck utilizando-se do método de Adomian;

1.3 Hipótese da pesquisa

Considera-se como hipótese da pesquisa a existência de propriedades fractais em sistemas astrofísicos, em especial no que se refere à emissão, em difusão, de radiação eletromagnética na frequência dos raios-X por pares binários e a modelagem desta fenomenologia como uma equação de Fokker-Planck com solução analítica com convergência numérica utilizando-se do método de Adomian.

1.4 Questão norteadora

A questão norteadora da pesquisa é: qual a factibilidade da explicação do comportamento da difusão de raios-X em pares binários astrofísicos como um modelo lastreado no que preconiza a equação de Fokker-Planck?

1.5 Justificativa do trabalho

Os sistemas estelares binários são de grande importância por nos permitirem deduzir parâmetros específicos, tais como o raio, temperatura superficial, massa, períodos de rotação, entre outros através de técnicas indiretas (de rotação, precessão e demais propriedades físicas associadas aos comportamentos das

estrelas do sistema) (BATTANER, 1999; LADA, 2006; GIACCONI *et al.*, 1962).

Entre as estrelas binárias encontram-se aquelas com emissão de raios-X, as denominadas XRBSs (X-ray Binary System), sendo factível a suposição de que as “curvas de luz” de emissão de raios-X destes pares binários possam ser analisadas e devidamente modeladas, primeiramente com hipóteses clássicas e também com considerações segundo um viés tsalliano, o que consubstancia suas formas de difusão (normal e até anômalo) mesmo submetidas a densas forças gravitacionais (BATTANER, 1999; LADA, 2006).

Dados coletados pelo instrumento All Sky Monitor, acoplado ao satélite Rossi X-ray (RXTE-ASM), de domínio público, indicam, em análises preliminares, um processo de difusão que pode ser modelado com considerações inerentes a uma difusão usual. Tal processo ocorre espontaneamente e cada elemento (fótons) de um conjunto se move e realiza uma trajetória de forma a poderem ser tratados como resultado das várias colisões lineares com as quais estão sendo difundidas. Isso permite considerá-lo como um processo estocástico e, de maneira análoga, supor que a probabilidade de um fóton de raios-X segue uma distribuição de probabilidades markoviana (quando existe dependências entre os eventos sucessivos) ou não-markoviana (quando esta dependência não é considerada) (TSALLIS, 2011) e (MORET, 2010).

O cenário aqui tratado constitui uma sequência de hipóteses sobre o processo difusivo (possível difusão anômala), representada por uma distribuição generalizada de probabilidades que se corporeificam em equações de Fokker-Planck (EFP). As EFP têm caráter central no estudo dos fenômenos estocásticos e aparecem em diversos contextos físicos nas suas modelagens dependentes da posição e do tempo com composição de forças restauradoras (de deriva) e difusivas (de flutuação), estas agindo sobre os sistemas e modelando a distribuição de probabilidades dos seus estados e sua evolução espaço-temporal (TSALLIS, 2009), (RISKEN, 1984).

A EFP foi inicialmente utilizada para explicar o movimento browniano, criando assim um caminho imprevisível, uma vez que as oscilações impossibilitariam determinar o local exato das partículas. Tornou-se então factível determinar a probabilidade de localizá-las em uma região, nas suas diversas formas de

distribuições probabilísticas (linear e não-linear, respectivamente) devido às hipóteses sobre as forças atuantes nos XRBS (FRANK, 2005).

Assim, a análise entrópica torna-se o instrumento mais provável de modelagem deste sistema complexo, aliada a um conjunto de possíveis interpretações físicas consensuais e fenomenológicas, para corroborar os dados numéricos coletados.

Os dados numéricos analisados indicam um comportamento generalizado que se verifica como bem correlacionado com a q-exponencial, esta obtida por meio da maximização da entropia tsalliana, desde que bem sujeita a vínculos apropriados que refletem as hipóteses das forças governantes do sistema. Decorrendo daí a equação de Fokker-Planck não-linear com a termoestatística de Tsallis (TSALLIS, 2009).

Esta pesquisa então é fruto de uma pesquisa mais ampla cujo objetivo geral foi o de analisar séries espectrais de raios-X advindos de sistemas astrofísicos binários como base para legitimar o modelo de difusão, com a solução de uma equação do tipo Fokker-Planck (RISKEN, 1984).

1.6 Estrutura da tese

Esta tese está estruturada em **seis** capítulos, onde, no **capítulo 1** apresentamos a pesquisa e seu desenvolvimento, fazendo um breve resumo de alguns conceitos que contextualizam o trabalho. Nele são apresentados os objetivos, geral e específicos, a hipótese e sua questão norteadora, além da justificativa.

O **capítulo 2** traz o referencial teórico: as ondas eletromagnéticas e espectro de raios-X, classificação, tipologia e evolução estelar, conceitos, definições e contextualização relativos aos processos de acreção e difusão de raios-X em sistemas binários estelares, além dos conceitos e estado da arte da mecânica estatística tsaliana, com consequente modelagem da equação de Fokker-Planck.

O **capítulo 3** descreve o processo metodológico, contextualizado à inovadora solução analítica da equação de Fokker-Planck com o uso do método de Adomian, com a descrição da série de Taylor generalizada e os polinômios de Adomian e as

suas fórmulas de recorrência para o cálculo genérico dos polinômios de Adomian e as regras de geração destes. dos polonômios de Adomian.

No **capítulo 4** é apresentada a modelagem no contexto fenomenológico, além das respectivas considerações e justificativas que demonstram a viabilidade da pesquisa de acordo com as é observações. Para tanto, é apresentada a solução da equação de Fokker-Planck com o método de Adomian juntamente com variações das hipóteses de testes à solução da equação de Fokker-Planck. Neste contexto apresenta-se o termo restaurador e difusivo constantes e normalizados de forma linear com as propostas clássicas hiperbólicas para a emissão, bem como as taxas restauradoras e difusivas unitárias e constantes com condição inicial e decaimento exponencial normalizado, além do normalizado ajustável, e, com a equação fracionária no tempo com a derivação fracionária de Caputo (α) com termo restaurador linear negativo, com respaldo fenomenológico com uma q-gaussiana. O capítulo é finalizado com a discussão sobre os respectivos resultados.

O **capítulo 5** evidencia os aspectos gerais dos resultados das modelagens com lastro nas hipóteses propostas e análise comparativa das mesmas, com resgistro dos repaldos físicos positivos e negativos de cada uma, além das colaborações singulares da pesquisa.

Por fim, o **capítulo 6** apresenta as considerações finais, o legado do trabalho e sugestões de ações futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresenta-se o referencial teórico fundante da pesquisa, com as considerações mínimas sobre as ondas eletromagnéticas e espectro de raios-X bem como as definições e contextos relativos aos processos de acreção e difusão de raios-X em sistemas binários estelares bem como o ferramental matemática para entendimento do estado da arte da mecânica estatística tsaliana e as bases fundamentais para a modelagem da equação de Fokker-Planck.

2.1 Ondas Eletromagnéticas e espectro de raios-X

O que denominamos usualmente de luz corresponde à região do espectro eletromagnético que é percebida pelo olho humano e cujos comprimentos de onda variam de 400nm a 700nm, aproximadamente. No entanto, o espectro de frequências conhecido para as ondas eletromagnéticas varia de frações de hertz a valores na faixa de 10^{20} hertz (OLIVEIRA, 2015).

Cada uma dessas faixas do espectro eletromagnético recebe uma denominação, sendo seus limites inexatos de forma que as ondas longas de rádio têm uma variação de frações até um máximo de 100 KHz, enquanto que ondas médias de rádio variam entre 500 kHz e 1,7 MHz. Já ondas curtas estendem-se de 2 MHz a 10^{13} Hz, sendo uma faixa muito ampla e bastante subdividida (OLIVEIRA, 2015).

Acima de poucas centenas de MHz temos a região de micro-ondas, que se estende ao início da região infravermelha. Esta última, com variação entre 10^{12} a 10^{14} Hz, em valores aproximados, corresponde às frequências de vibração térmicas de átomos e moléculas, sendo sua produção associada ao efeito Joule³.

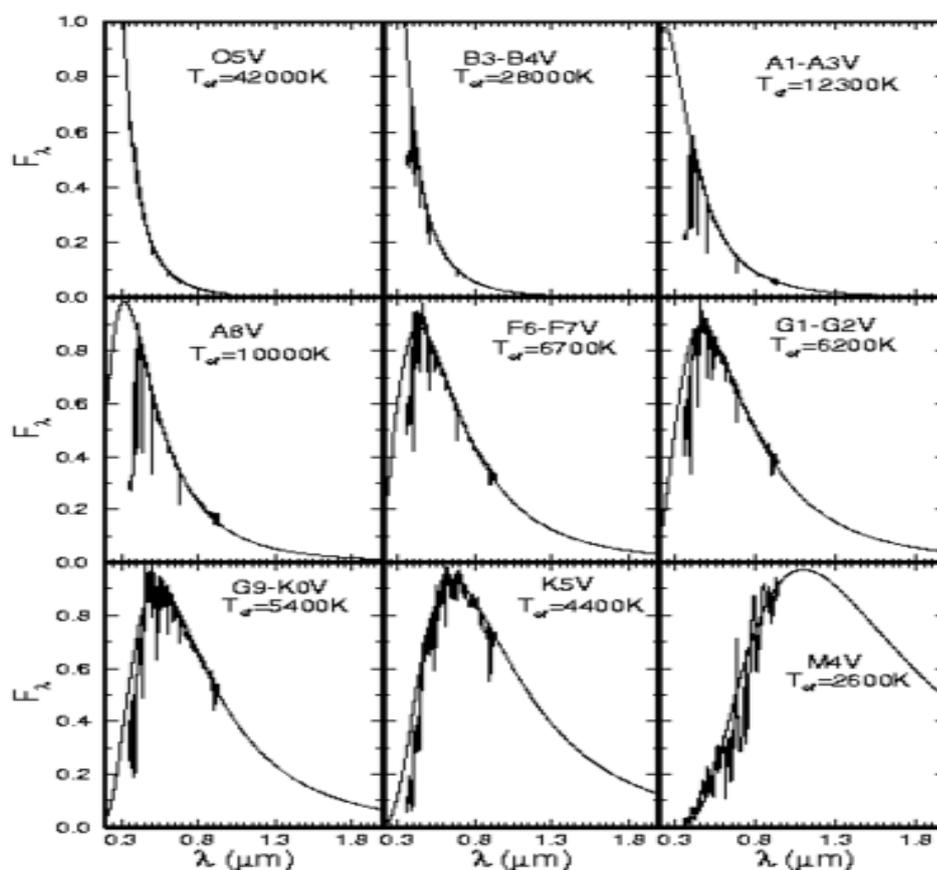
A luz que produz a sensação de cor ou matiz ao olho humano, a luz visível, é

³ Produção de calor pela passagem de uma corrente elétrica.

uma faixa do espectro eletromagnético cujo comprimento de onda varia de 700 nm (vermelho) a 400 nm (violeta). As frequências acima da luz violeta correspondem ao espectro ultravioleta, indo do fim do espectro visível violeta até 10^{17} Hz, onde se confunde com a faixa de raios-X.

Ainda segundo Oliveira (2015), temos a faixa de raios- γ (raios gama), que inicia-se em torno de 10^{18} Hz e estende-se a 10^{24} Hz, e cujos raios passam a denominar-se raios cósmicos. Os raios- γ são produzidos pelas fontes radioativas naturais e artificiais, sendo altamente penetrantes na matéria ordinária de baixa densidade, podendo ser absorvidos por substância muito densas, como o chumbo. Resulta de processos naturais que ocorrem no interior do núcleo atômico. A radiação cósmica corresponde à radiação gama de alta frequência de origem cósmica.

Figura 1 Espectros das estrelas por classe espectral, graficados com uma Lei de Planck de temperatura indicada, de 3000 Å a 18 000 Å.



Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2014).

A faixa de raios-X, cuja frequência de radiação eletromagnética inicia-se em torno de 10^{16} Hz, coincidem com a região final da radiação ultravioleta em direção às altas frequências. Os raios-X podem ser produzidos por fontes radioativas naturais, e têm valores bem definidos e fixos de frequência, ou por meios artificiais, desde que haja desaceleração brusca de carga elétrica em um choque com um alvo fixo, ou mesmo acelerando cargas elétricas em aceleradores de partículas (OLIVEIRA, 2015).

Como dito anteriormente, o espectro emitido por uma fonte de radiação eletromagnética não está confinado a frequências bem definidas. A maior parte dos objetos celestes luminosos emite radiação em faixas amplas de frequência, isto é, o espectro “contínuo” (MILONE *et al.*, 2003).

A Figura 1 registra o espectro eletromagnético de estrelas, por meio de um gráfico de comprimento de onda por fluxo relativo. Quanto maior a temperatura, mais energia é emitida por unidade de área e com isso, mais deslocado para o azul é o máximo do espectro. Os espectros estelares têm a presença de linhas de absorção e de emissão com localizações específicas devido aos elementos químicos que compõem as estrelas (MILONE *et al.*, 2003).

2.2 Tipos de Estrelas e algumas considerações das origens dos XRBSs

Uma estrela é tida como um conjunto de grandezas observáveis, como massa, raio, luminosidade, temperatura da superfície, composição química, velocidade rotacional, entre outras. A massa de uma estrela pode ser calculada por meio da 3ª Lei de Kepler, quando a estrela se encontra em um sistema binário. Do contrário, isso só é possível se esta for eclipsada pela Lua (KALIRAI, 2004).

Abaixo listamos alguns tipos de estrelas, com uma breve explanação, a título de diferenciá-las quando estas categorias forem mencionadas no texto.

Anã branca: As anãs brancas são os produtos finais de todo o processo evolutivo estelar em todas as estrelas de massa intermediária e baixa. Mais de 99% de todas as estrelas em nossa Galáxia finalmente acabarão suas vidas como anãs brancas (KALIRAI, 2004). O Sol tornar-se-á uma anã branca nos seus estágios

finais, alcançando o tamanho aproximado da Terra, embora com massa muito superior, o que torna este tipo de estrela muito densa. Sua luminosidade é tão fraca, que mesmo as mais próximas de nós só podem ser vistas por meio de telescópios.

Anã vermelha: As anãs vermelhas são muito menores e mais compactas que o Sol e são as estrelas mais abundantes do Universo. Com uma vida útil que pode variar entre bilhões a trilhões de anos, passando a idade do Universo, elas têm um raio com comprimento de, aproximadamente 1/10 do raio do Sol, para aquelas com temperatura de 2700K. Elas têm massa que variam entre 7,5% e 40% a do Sol, o que acarreta uma temperatura superficial mais fria do que o Sol, com valores aproximados de 3.500 Kelvin (3.230 graus Celsius) em comparação com mais de 5.750 Kelvin (5.475 graus Celsius) do Sol (FILHO e SARAIVA, 2014).

Figura 2 Imagem de Sírius A e sua companheira, uma anã branca, à direita



Fonte: (Neutron Star X-ray binaries, 1996)

Anã vermelha: As anãs vermelhas são muito menores e mais compactas que o Sol e são as estrelas mais abundantes do Universo. Com uma vida útil que pode variar entre bilhões a trilhões de anos, passando a idade do Universo, elas têm um raio com comprimento de, aproximadamente 1/10 do raio do Sol, para aquelas com temperatura de 2700K. Elas têm massa que variam entre 7,5% e 40% a do Sol, o que acarreta uma temperatura superficial mais fria do que o Sol, com valores aproximados de 3.500 Kelvin (3.230 graus Celsius) em comparação com mais de 5.750 Kelvin (5.475 graus Celsius) do Sol (FILHO e SARAIVA, 2014).

Ainda segundo Filho & Saraiva (2014), assim como no Sol, a energia é gerada através da fusão de hidrogênio em hélio, mas por ter pouca massa e temperatura do núcleo menor, sua taxa de fusão nuclear é muito inferior, o que as faz emitir menor quantidade de luz. Até as maiores anãs vermelhas emitem apenas 10% da luz do Sol. Em todas as estrelas, a energia do núcleo é irradiada pela superfície através do processo de convecção, perdendo grande quantidade de massa no processo. As anãs vermelhas são totalmente convectivas. Isso significa que o hélio não se acumula no núcleo e as estrelas podem continuar a queimar o hidrogênio por muito mais tempo do que outras estrelas.

Já a categoria da Anã Marron, embora comumente sejam designadas como estrelas, as anãs marrons não são assim consideradas na astronomia. Elas são corpos celestes de massa muito pequena, o que impede que haja uma fusão nuclear em seus núcleos. Sem fusão nuclear, elas não podem ser categorizadas como estrelas (RICCI *et al.*, 2012).

As Estrelas de nêutrons são objetos astrofísicos muito compactos, advindo da evolução de estrelas com massas variando entre $8M_{\odot}$ e $20M_{\odot}$, cujo colapso gravitacional, em seus estágios finais de evolução, só finda com a pressão de degenerescência exercida pelos nêutrons. Têm diâmetro de cerca de 15 quilômetros, embora contenha tanta matéria quanto o Sol (SILVEIRA, 2012).

Tem-se também as ditas Estrelas variáveis, que são Estrelas cuja produção de luz apresenta variações. Algumas variam de tamanho. Podem ser classificadas em: Cefeidas, tipo Algol, Tipo Lyrae, além de outras denominações mais incomuns, como Sag, Canum Venaticorum, Semiregular, entre outras. Muitas estrelas variáveis fazem parte de sistemas binários. Em 1975, mais de 25.000 Estrelas foram classificadas em nossa galáxia (SOBRINHO, 2013).

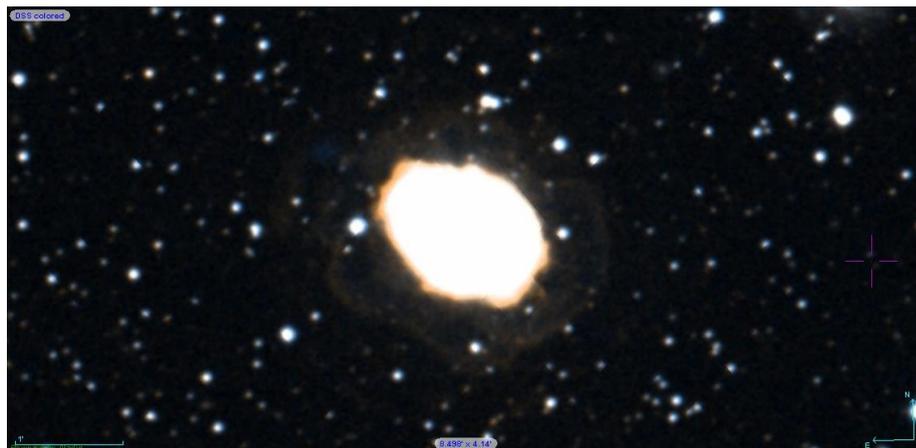
As denominadas de Gigante Azul são classes de estrelas que são muito grandes e com temperaturas muito elevadas, além de serem também muito luminosas. Tais estrelas não fazem parte da seqüência principal, sendo classificadas como pós seqüência principal. Estas gigantes queimam hélio, têm o tipo espectral O ou B e são muito raras. As estrelas gigantes azuis têm, pelo menos, 18 vezes a massa do Sol. Exemplos incluem Rigel e Regulus (FILHO; SARAIVA, 2014).

As ditas Gigantes Vermelhas são bem maiores que o Sol e com temperaturas mais baixas, o estágio de gigante vermelha é alcançado próximo ao fim do ciclo de existência de uma estrela, quando ela se expande por força da pressão da radiação produzida pelas reações termonucleares ocorridas em seu núcleo (KALER, 2006). O Sol deverá se transformar numa gigante vermelha semelhante a *Arcturus*, dentro de mais ou menos 5.000 milhões de anos.

E as Estrelas Supergigantes são, segundo Kaler (2006), são aquelas que se tornam dezenas ou centenas de vezes maiores do que o Sol. As supergigantes são estrelas extremamente evoluídas, nos estágios finais de sua vida e possuem uma luminosidade extremamente alta, com temperaturas superficiais relativamente frias. São as maiores estrelas conhecidas até então, com diâmetros que ultrapassam em mais de 100 vezes o do Sol. Algumas são quase tão grandes quanto o nosso Sistema Solar inteiro. As estrelas Betelgeuse e Rigel são supergigantes. As estrelas supergigantes são raras. Quando as supergigantes morrem elas explodem como supernovas e depois tornam-se buracos negros.

E as Nebulosas planetárias têm massa esférica de gás que, por causa da aparência visual em pequenos telescópios, assemelham-se a planetas, o que deu origem à nomenclatura (MILONE, 2003).

Figura 3 Imagem da Nebulosa Planetária M57 (software Aladin Sky Atlas)



Fonte: Imagem do ALADIN Sky Atlas, 2018.

Uma das nebulosas planetárias mais conhecidas é a M57 (NGC 6720), conforme ilustrado na Figura 3, localizada na constelação de Lyrae. Ela possui

diâmetro angular de 70". As estrelas centrais das nebulosas desta categoria são anãs brancas do tipo espectral O (MADEJSKY, 2014).

As nebulosas planetárias são formadas a partir de estrelas com massas entre $0,5 M_{\odot}$ e $4 M_{\odot}$. Tais estrelas não atingem a temperatura central que permita iniciar a queima de carbono. Sua fase evolutiva é concluída com a queima de hélio, resultando em uma parte central da estrela de carbono e oxigênio, com elétrons totalmente degenerados (MILONE, 2003). Nesta fase ela é uma estrela gigante vermelha e seu vento estelar forte tem como consequência a perda de grande parte do envelope de hidrogênio (KALER, 2006). Neste processo de formação das anãs brancas, dá-se as nebulosas planetárias, que representam a fase de evolução final das estrelas de baixa massa.

A Estrelas Novas são a explosão de uma estrela dá-se este nome. É provável que as Novas sejam sistemas binários nos quais o gás flui de uma estrela para uma anã branca companheira. Esse gás se inflama e é expelido da anã branca, causando a erupção de brilho. Uma Estrela não é devastada por uma explosão de nova; assim o processo pode se repetir, ao contrário do que se acredita que ocorra com as supernovas. Em um único dia, seu brilho aumenta 10.000 vezes ou mais, para depois esmaecer lentamente num período de semanas ou meses (FILHO; SARAIVA, 2014).

E as Pulsares são as Estrelas com emissão periódica de rádio e são estrelas de nêutrons giratórias que emitem feixe de radiação semelhante à luz dos faróis. Foram descobertos em 1967 e desde então diversos outros têm sido encontrados e estudados.

Os Quasares são objetos de grande intensidade e brilho, situado num ponto remoto do espaço, e que se acredita ser o centro de uma galáxia em formação. Os quasares são tão pequenos, que parecem estrelas mesmo nos maiores telescópios, embora produzam milhares de vezes mais energia do que uma galáxia como a Via-Láctea. Talvez sua energia se origine de um buraco negro gigante existente em seu centro.

Enquanto as Supernovas são, resumidamente, a explosão brilhante de uma estrela de alta massa, no seu ciclo final de existência. O colapso da parte central de uma estrela de massa $M > 4 M_{\odot}$, ou mesmo eventualmente, $M > 8 M_{\odot}$, gera como

resultado uma estrela de nêutrons ou mesmo um buraco negro e na conseqüente explosão violenta do envelope da estrela chamada supernova (MADEJSKY, 2014). A famosa nebulosa do caranguejo, ilustrado na Figura 4, é um exemplo deste tipo de estrela. No caso de uma supernova ocorrer em um sistema binário, sua companheira pode sofrer alguns danos nas camadas superficiais, mas continuar sua “vida”. Com isso, uma estrela de nêutrons será formada próximo à outra estrela. Quando esta evoluir para uma gigante vermelha, o seu gás irá espiralar em direção à estrela de nêutrons. Esse gás que é tragado pela estrela de nêutrons formará um espesso disco ao redor dela; tal disco é chamado de disco de acreção.

Figura 4 Imagem da Nebulosa do Caranguejo (NGC 1952), utilizando o software Aladin.



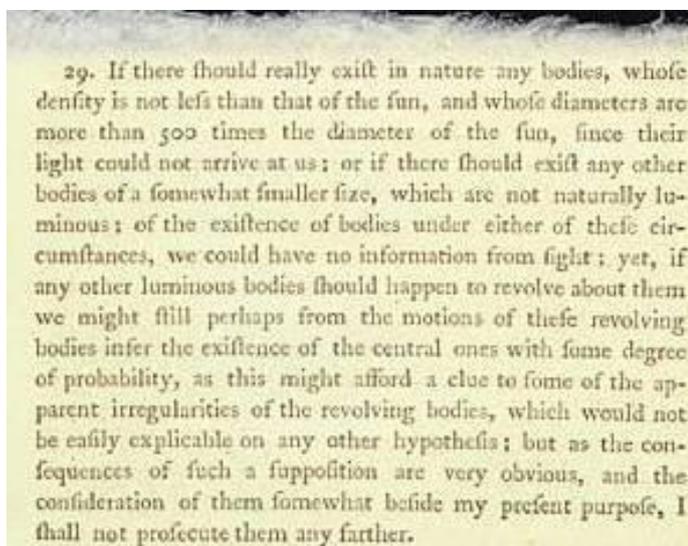
Fonte: Imagem do ALADIN Sky Atlas, 2018.

Já os Buracos Negros são volumes de espaço cuja gravidade é tão grande, que nem mesmo a luz escaparia. Esta definição foi enunciada pela primeira vez em 1783, pelo inglês John Michell, em um artigo escrito à Royal Society. A partir de seus estudos sobre as estrelas binárias, surgiu a hipótese de que determinados corpos escuros macivos poderiam atrair demais corpos celestes e até a luz. Michell afirmou no artigo que qualquer objeto deve ser invisível quando sua velocidade excede a da luz. Em 1796, Pierre-Simon Laplace lança o livro *Exposition du Système du Monde*, onde conjectura:

“A atração gravitacional de uma estrela com um diâmetro de 250 vezes a do Sol e com densidade comparável à Terra, seria tão grande que nem luz poderia escapar de sua superfície. Os maiores corpos no universo podem, assim, ser invisíveis devido às sua magnitude.” (LAPLACE, 1796, p. 548).

A existência de buracos negros voltou à tona em 1916, depois que Einstein publicou sua teoria da gravidade e Karl Schwarzschild resolveu as equações de Einstein para o caso de um buraco negro, que ele idealizou como sendo um volume esférico de espaço distorcido em torno de uma massa concentrada e completamente invisível para o mundo exterior. O trabalho de Robert Oppenheimer e outros contemporâneos levou à ideia de que tal objeto poderia ser formado pelo colapso de uma estrela massiva. O termo "buraco negro" foi cunhado em 1968 pelo físico de Princeton, John Wheeler, que elaborou mais detalhes sobre as propriedades de um buraco negro. Os buracos negros mais comuns são provavelmente formados pelo colapso de estrelas massivas. Acredita-se que buracos negros maiores sejam formados pelo súbito colapso ou acreção gradual da massa de milhões ou bilhões de estrelas. A maioria das galáxias, incluindo a nossa Via Láctea, provavelmente contém buracos negros supermassivos em seus centros (SOTER; TYSON, 2001; Neutron Star X-ray binaries, 1996).

Figura 5 Título e trecho do artigo de John Michell de 1783, que descreveu pela primeira vez o conceito de um buraco negro no Philosophical Transactions, da Royal Society of London.



Fonte: Philosophical Transactions da Royal Society of London, vol. 74, p. 35. 1784.

Segundo Soter e Tyson (2001), quanto maior um buraco negro, menor a sua densidade média, e é concebível que todo o nosso universo observável seja um buraco negro supermassivo dentro de um universo maior. Michell sugeriu que

podéssemos detectar buracos negros invisíveis se alguns deles tivessem estrelas luminosas girando em torno deles. Na verdade, este é um método usado pelos astrônomos hoje para inferir a existência de buracos negros. Temos observado numerosos sistemas nos quais a matéria, seja ela nuvens de gás ou estrelas inteiras, está se movendo tão rapidamente que somente a massa concentrada de um buraco negro poderia ser responsável por ela.

Enquanto os buracos negros influenciam fortemente o espaço imediatamente ao seu redor, a noção de que eles se comportam como aspiradores cósmicos, varrendo tudo na vizinhança, é uma falácia popular. Se o Sol fosse de alguma forma desmoronado para formar um buraco negro, o movimento orbital dos planetas não seria afetado. A massa central permaneceria a mesma, então os planetas sentiriam a mesma gravidade de antes. O que distingue um buraco negro estelar é seu tamanho muito pequeno e alta densidade. Isso permite que outros corpos se aproximem muito do centro de massa, onde a gravidade é extremamente intensa. Mas isso não aumenta a atração da gravidade para longe da massa (SOTER; TYSON, 2001).

As considerações aqui postas sobre buracos negros têm o objetivo de inserir conceitos básicos que tenham relação com as XRBS. Uma vez que algumas delas têm candidatas a buracos negros como um dos elementos do par binário, consideramos interessante trazer algumas informações, mesmo que de cunho introdutório. Informações e correlações mais apuradas poderão estar presentes na versão final isto é, na Tese.

2.3 As estrelas binárias e suas classificações

Estrelas binárias (ou Estrela dupla) constituem-se de dois corpos astrofísicos que orbitam em torno de um mesmo centro de massa. Elas também obedecem à lei do movimento planetário de Kepler, devido à força gravitacional que atua em corpos com tamanho e densidade de estrelas de todas as categorias.

O método matemático necessário para determinar a geometria da órbita relativa de um componente em relação ao seu companheiro a partir de um conjunto

de observações de ângulo de posição e separação foi desenvolvido por Savary em 1827 (MADEJSKY, 2014). A terceira lei de Kepler relaciona o período orbital P e o tamanho da órbita relativa, estritamente o eixo semimaior " a ", à soma das massas das duas estrelas ($m_1 + m_2$) e dada de acordo com a eq. 5, a seguir:

$$G(m_1 + m_2) = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2} \quad (5)$$

sendo G a constante gravitacional universal (HILDITCH, 2001).

Os sistemas binários estelares podem assumir as seguintes classificações: estrelas binárias visuais, binárias ópticas, astrométricas, eclipsantes, além de espectroscópicas.

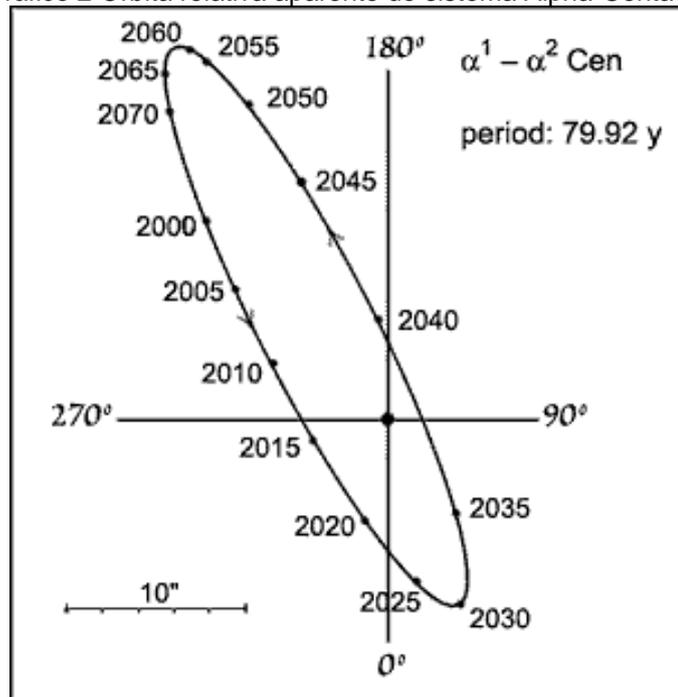
As binárias visuais compõem um sistema cujas componentes podem ser resolvidas individualmente com a utilização de um telescópio. Observações de longo prazo podem ser realizadas para traçar as posições relativas dos membros do sistema. Com o tempo, esses dados são acumulados e usados para calcular as órbitas das estrelas (MADEJSKY, 2014). Binários visuais tendem a ser sistemas que estão relativamente próximos de nós para que as estrelas individuais possam ser resolvidas. São sistemas nos quais as estrelas componentes são também fisicamente separadas, dezenas a algumas centenas de unidades astronômicas (AUs).

As estrelas em tais sistemas são ligadas gravitacionalmente umas às outras, mas de outra forma não "interagem", como fazem outros binários próximos, onde uma estrela pode extrair material da superfície da outra. O componente mais brilhante do sistema tem o sufixo "A", o próximo "B" e assim por diante. Sistemas com três ou quatro componentes foram identificados. Por exemplo, α Centauri, que está a uma distância de 1.338 pc, é de fato um binário visual com as duas estrelas α Cen A e α Cen B separadas por uma distância de cerca de 23 Unidades Astronômicas, ligeiramente maior que a distância entre Urano e o Sol.

Eles orbitam uma à outra com um período de 80 anos. Uma terceira estrela, Proxima Centaury, atualmente a estrela mais próxima de nós, está a uma distância de 4,22 anos-luz ou 1,295 megas e é também chamada de Cen C. Por muitos anos,

desde a sua descoberta em 1915, foi pensado que esta seria um terceiro membro do sistema, com uma distância muito maior do centro de massa do sistema. No entanto, observações recentes sugerem que esta pode não estar ligada gravitacionalmente às outras duas (HILDITCH, 2001).

Gráfico 2 Órbita relativa aparente do sistema Alpha-Centaury.



Fonte: <http://www.atnf.csiro.au/outreach//education/senior/astrophysics/>

O gráfico 2 mostra a órbita relativa aparente do sistema binário α Cen A e B. Neste diagrama, o componente mais brilhante, α Cen A é mostrado no centro dos eixos, de modo que o movimento do companheiro α Cen B, em torno dele, é mostrado. Na realidade, ambas as estrelas orbitam um centro de massa comum. As posições previstas para B em relação a A para a órbita atual são mostradas por ano. O movimento é aparente porque é uma projeção relativa do céu, sendo o componente mais massivo (primário) considerado o centro do movimento.

Outra classificação para os sistemas binários compõe as estrelas binárias espectroscópicas. O espectro de uma estrela nos fornece uma ampla gama de informações sobre as propriedades da superfície estelar, como temperatura, gravidade superficial, composição química e velocidade de rotação, bem como

evidências de aspectos incomuns, como atmosferas estendidas ou interações com um companheiro em órbita (HILDITCH, 2001).

A maioria dos sistemas duplos está muito distante para serem resolvidas como visuais pelos telescópios atuais. Outros são simplesmente muito próximos para serem resolvidos separadamente. Assim, a maioria dos sistemas binários foi detectada pelos desvios *Doppler* em suas linhas espectrais. Tais sistemas são chamados de binários espectroscópicos .

Se um sistema binário não for resolvido em seus componentes, o espectro obtido a partir dele será uma combinação dos espectros de cada uma das estrelas componentes. Como estas estrelas orbitam uma à outra, uma estrela, A, pode estar se movendo em nossa direção enquanto a outra, B, pode estar se afastando. O espectro de A será, portanto, deslocado para o azul, para frequências mais altas (comprimentos de onda mais curtos), enquanto o espectro de B terá um desvio para o vermelho, o denominado *redshifted*. Se as estrelas estão se movendo através da nossa linha de visada, então não há mudança de *Doppler* (HILDITCH, 2001).

Desta maneira, conforme as estrelas continuam auto-orbitando-se a estrela A irá retroceder de forma que suas linhas espectrais vão deslocar-se para o vermelho do espectro e B se mova em direção ao azul, pois uma estará afastando-se enquanto a outra aproximando-se do referencial de observação.

Obviamente, a capacidade de detectar um binário espectroscopicamente depende de alguns fatores. Em primeiro lugar, se o plano orbital do sistema estiver perpendicular à nossa linha de visão, então não observaremos nenhum desvio *Doppler*. O sistema não será detectado como um binário. Se as estrelas componentes estiverem com massa baixa e / ou afastadas, o período será longo e as velocidades orbitais baixas, reduzindo a chance de detecção. Em alguns sistemas, um dos componentes é muito fraco para contribuir muito para o espectro combinado, de modo que apenas um conjunto de linhas mostre mudanças periódicas (MADEJSKY, 2014).

Desta forma, com os pre-requisitos considerados tem-se o fato de que a análise das mudanças de linha espectral versus tempo revela informações sobre as velocidades radiais das estrelas componentes.

2.4 Evolução estelar e estrelas Binárias de Raios-X

A maior parte das estrelas fazem parte de sistemas múltiplos, especialmente binários. A maioria das estrelas duplas, embora orbitem em torno de um mesmo centro de massa, distanciam-se algumas unidades astronômicas⁴, tendo seu período orbital composto de alguns anos. No entanto, algumas binárias têm uma distância de separação muito menor e períodos de horas. Essa proximidade entre elas é tão grande que as mesmas acabam trocando material envoltório, de modo que podem ocorrer grandes explosões que expulsam matéria para fora do sistema (MANDEJSKY, 2014).

Estrelas com massa menor que oito massas solares não conseguem atingir temperaturas altas o bastante para dar início à síntese de núcleos mais pesados que os do oxigênio. Embora elas não contribuam muito para a síntese de elementos químicos, são elas as responsáveis pela maior liberação de energia produzida por meio de radiação eletromagnética (MANDEJSKY, 2014).

Segundo Mandejsky (2014), para estrelas com massa superior a oito massas solares ($M > 8M_{\odot}$), os modelos teóricos e as simulações sugerem que, após a queima do hélio, continua a alternância entre fases de contração e de queima, sintetizando elementos cada vez mais pesados. Isto requer temperaturas mais altas que permitam vencer a barreira de Coulomb⁵. Algumas das características relacionadas à temperatura podem ser catalogadas em um “mapa” conhecido como diagrama HR.

O Diagrama de HR (ou Hertzsprung Russell) relaciona temperatura e luminosidade de uma estrela. Tanto a luminosidade (ou magnitude absoluta) como a temperatura superficial de uma estrela são características facilmente determináveis

⁴ Uma unidade astronômica, UA, é a distância da Terra ao Sol.

⁵ Barreira de Coulomb (barreira coulombiana) é a energia advinda da interação eletrostática que dois núcleos atômicos necessitam vencer para se aproximarem suficientemente, a ponto de proporcionar interação atômica, desencadeando, uma reação de fusão nuclear. A energia mencionada é dada pela energia potencial eletrostática preconizada pela Lei de Coulomb: $U_{coul} = k \frac{q_1 q_2}{r}$, sendo k a constante de Coulomb = 8.9876×10^9

$N \text{ m}^2 \text{ C}^{-2}$; ϵ_0 a permissividade do espaço livre; q_1, q_2 as cargas das partículas interativas e r o raio da interação. Esta “barreira” aumenta com os números atômicos. Para vencer esta barreira os núcleos têm que colidir em velocidades elevadas (altas energias cinéticas) e, em geral, com altas temperaturas. Na prática, temperaturas necessárias para superar a barreira de Coulomb serão menores que a prevista devido ao efeito de tunelamento, preconizado na mecânica quântica, como estabelecido por Gamow.

para estrelas de distâncias conhecidas. A primeira pode ser encontrada a partir da magnitude aparente, e a segunda a partir de sua cor ou tipo (FILHO; SARAIVA, 2014).

Segundo Filho & Saraiva (2014), nesses diagramas convencionam-se um crescimento da temperatura para a esquerda, e de luminosidade para cima. A maior parte das estrelas está alinhada ao longo de uma estreita faixa diagonal que parte do extremo superior esquerdo (estrelas quentes e muito luminosas) em direção ao extremo inferior direito (estrelas frias e pouco luminosas). Tal faixa é denominada de sequência principal (SP). O fator que determina onde uma estrela se localiza na sequência principal é a sua massa: estrelas mais massivas são mais quentes e mais luminosas. As estrelas da sequência principal têm, por definição, classe de luminosidade V, e são chamadas de anãs. Além destas, um número significativo de estrelas está concentrado acima da SP, na parte superior direita (estrelas frias e luminosas).

Estas são as denominadas gigantes, e pertencem à classe de luminosidade II ou III. No topo do diagrama existem algumas estrelas ainda mais luminosas: as supergigantes, com classe de luminosidade I. Por fim, algumas estrelas se concentram na parte inferior esquerda (estrelas quentes e pouco luminosas), as chamadas anãs brancas. Apesar do nome, essas estrelas cobrem um intervalo de temperatura e cores que abrange desde as mais quentes, que são azuis ou brancas e têm temperaturas superficiais de até 170 000 K, até as mais frias, que são vermelhas, com temperaturas superficiais de apenas 3500 K.

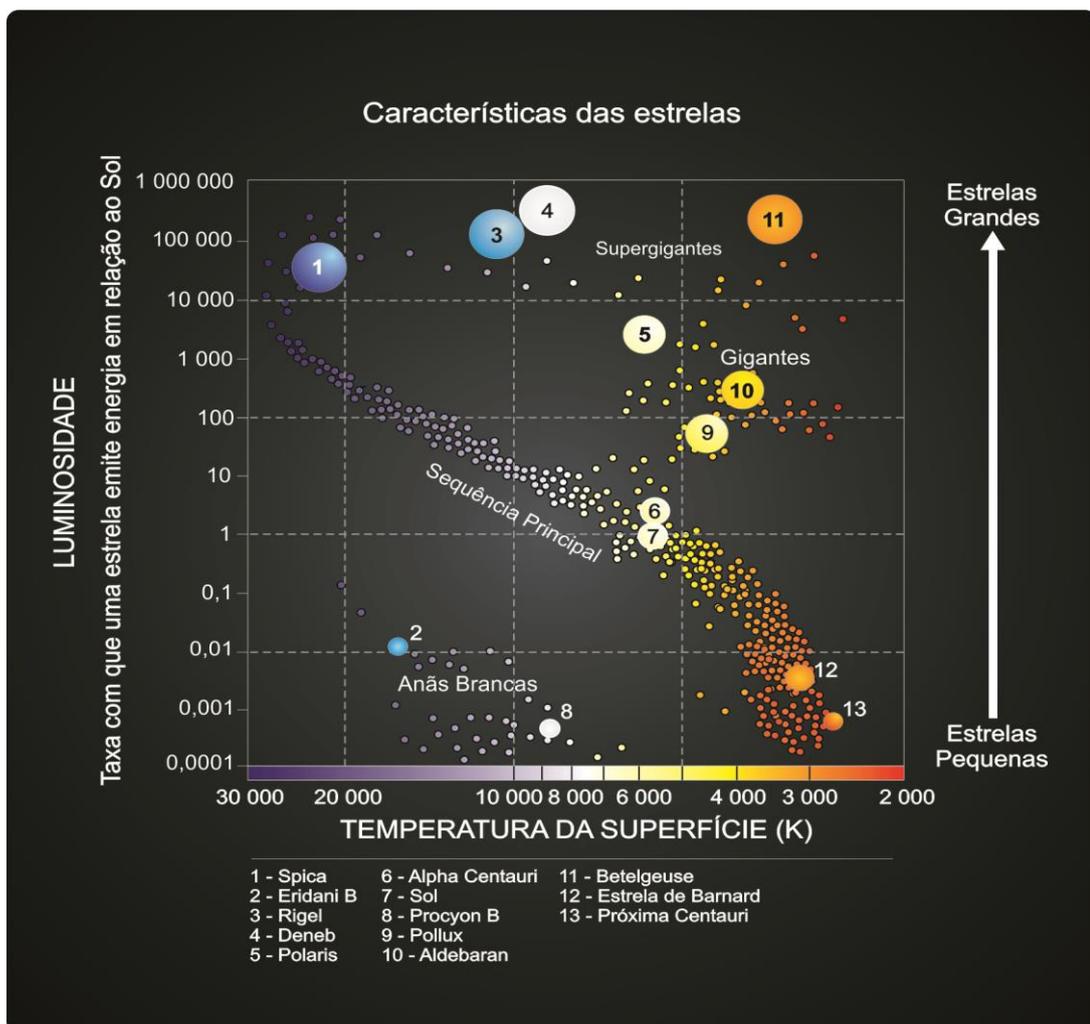
Se, por exemplo, quisermos saber a aparência, no diagrama HR, de estrelas pertencentes a um mesmo aglomerado, sabemos que tal organização depende fortemente da idade do aglomerado e esta é uma das razões pelas quais os diagramas HR são importantes para estudos da evolução estelar.

No contexto da pesquisa, para que uma equação de Fokker-Planck seja devidamente deduzida, torna-se importante considerar o contexto astrofísico na determinação das condições de contorno. Portanto, ainda no que tange aspectos da pesquisa, considerando as categorias analisadas, é importante considerar a evolução das estrelas até seu estágio final. Sobre as que se tornam estrelas de nêutrons e aquelas que no fim da vida tornam-se buracos negros, tem-se as

seguintes informações:

Após o colapso do estágio de estrela de nêutrons, as estrelas com massas inferiores a 2-3 massas solares devem permanecer estrelas de nêutrons, gradualmente irradiando sua energia, porque não há mecanismo conhecido para uma combinação posterior e as forças entre os nêutrons impedem o colapso adicional. Mas esta força de nêutron é a última posição, e nossos melhores cálculos indicam que essa repulsão que evita o colapso não pode suportar a força de gravidade de massas maiores que 2 a 3 massas solares. Essas estrelas de nêutrons desmoronariam em direção à extensão espacial zero - em direção a uma "singularidade" (FILHO; SARAIVA, 2014).

Figura 6 Diagrama HR



Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2014)

Uma vez que eles desmoronaram passado um certo raio, o "horizonte de eventos", então mesmo a luz não poderia escapar do buraco negro.

Como os buracos negros, por sua própria definição, não podem ser diretamente observados, utilizam-se evidências baseadas em observações, espectroscopia e análises astrofísicas e astronômicas (FILHO; SARAIVA, 2014).

A teoria do colapso gravitacional e da formação de estrelas de nêutrons e de buracos negros foi desenvolvida com base na teoria da relatividade geral (MADEJSKY, 2014). A evidência mais forte para buracos negros vem de sistemas binários nos quais uma estrela visível pode ser mostrada para orbitar uma companheira maciça, mas invisível.

Com base no exposto, o digrama H-R mostrado na Figura 6 refere-se à evolução estelar de estrelas individuais. Neste cenário, considera-se que a massa permanece constante. Nos sistemas binários cerrados, em que há transferência de massa, a evolução estelar pode se dar de maneira bastante distinta (MILONE, 2003). Ainda segundo Milone (2003), a evolução da dupla binária corresponde à evolução individual até que se atinja o raio de Roche, uma vez que a expansão da estrela além deste limite implica em transferência de massa e conseqüente modificação nos aspectos considerados na evolução estelar individual.

2.5 Difusão

2.5.1 Conceitos e definições

Considerando um fluido - o solvente - com uma concentração não uniforme de partículas em suspensão, o número médio de partículas por unidade de volume dependerá da posição em cada instante, $n(x, t)$, a uma dimensão, sabendo que o número total de partículas em todo o volume n permanece constante. Mesmo sem a ação de elementos exteriores, esta não é uma situação de equilíbrio, o que acarretará um movimento de partículas que tenda a levar o sistema (fluido mais partículas) a um estado de maior entropia, isto é, de concentração mais uniforme. Este movimento é denominado difusão, contrastando com o movimento associado

ao escoamento de um fluido (CASTILHO; TEIXEIRA, 2012).

No contexto desse processo, considerando se tratar de um conjunto de elementos com mobilidade - energia, momento linear, átomos, moléculas, produtos químicos, células, entre outros - cada constituinte deste sistema realiza uma trajetória do tipo "randômica", o que resulta num movimento individual totalmente irregular, fazendo com que o conjunto se difunda. Em nível macroscópico, este comportamento coletivo, em contraste com o movimento individual microscópico, mostra grande regularidade, seguindo leis dinâmicas bem definidas (PEDRON, 2003).

2.5.2 Acreção e Difusão em Estrelas Binárias

A acreção, bem como a difusão, são fenômenos comumente encontrados em objetos cuja interação gravitacional seja muito forte, como é o caso das XRBS. As estrelas de nêutron costumam fazer parte de um bom percentual destes sistemas.

As estrelas de Nêutron não costumam ser sistemas isolados, embora muitos autores mostrem suas escalas de desenvolvimento unitárias. Elas estão quase sempre agregadas a uma estrela companheira em um sistema binário, originada de uma nebulosa ou de sua matéria interestelar no início de sua formação (MICHAUD; ELCIAN; RICHER, 2015). Acredita-se que muitas fontes de raios-X sejam bons exemplos de acreção em estrelas de nêutrons. Os raios-X que desencadeiam o processo de acreção desta categoria de estrelas, o fazem no lóbulo de Roche.

Ligeiramente abaixo do local onde ocorre queima de hidrogênio, a escala de tempo de estratificação do Fe em He é de aproximadamente 7 horas. Acima deste ponto, escalas de tempo de difusão do Hidrogênio chegam a minutos ou mesmo segundos. Grandes efeitos de difusão são, conseqüentemente, esperados a menos que eles sejam eliminados por um grande fluxo de acreção. Para estrelas de nêutrons, a taxa de acreção está intimamente ligada ao tempo médio dos fluxos de raios-X. (MICHAUD *et al.*, 2015).

A taxa de acreção nas estrelas de nêutrons é frequentemente analisada em termos do limite de Eddington⁶, que representa a maior taxa de luminosidade que uma estrela de determinada massa pode ter sem a perda de seu equilíbrio hidrostático. Este é o máximo de luminosidade de uma estrela para além do qual o fluxo de radiação leva a uma força de radiação de $[L_{km} / (4\pi R^2 c)]$ que vence a gravidade (GMm / R^2) e expelle a matéria para o exterior (MADEJSKY, 2014).

A luminosidade dos pulsos de raios-X varia entre 10³³ a 10³⁹ erg/s; Essa emissão de energia de energia deve vir de acreção de matéria à superfície da estrela de nêutrons a uma taxa de 10⁻¹³ -10⁻⁷ M_o /yr (LIPUNOV *et al.*, 1992).

Na prática, os modelos em que a difusão desempenha um papel interessante, são aqueles envolvendo explosões de queima nuclear. A relação entre acreção e ejeção é fortemente afetada pela forma como a composição da matéria acrescida é modificado pela difusão antes de ser inflamada.

Segundo Peng *et al.* (2007), um estudo cuidadoso do efeito de difusão nos discos de acreção tem sido feito ao longo dos últimos anos. Este estudo estabelece o efeito da difusão atômica, comparando a evolução das colunas de acreção com a difusão atômica e as destituídas dela.

2.6 A Mecânica Estatística de Tsallis e o processo de difusão de raios-X

A mecânica estatística de Tsallis é uma das teorias utilizadas para fenômenos que levam em conta a não-aditividade de sistemas específicos. Ela é uma generalização da clássica mecânica estatística de Boltzmann e Gibbs (MEBG). Portanto, faremos algumas considerações a respeito da MEBG, mesmo porque, a mecânica estatística tsalliana traz termos tais como entropia e outros, que podem ser inicialmente compreendidos na MEBG.

Segundo Tsallis (2009), Interações microscópicas de longo alcance (e memória microscópica de longo alcance), bem como interações que exibem

⁶ O limite de Eddington é função da massa do objecto e é normalmente expresso fazendo referência à massa e à luminosidade do Sol: $L_{Eddington} = 33.000 \frac{M}{M_o} L_o$, onde: L_{Eddington} é a luminosidade máxima, M é a massa do objecto, M_o é a massa do Sol e L_o é a luminosidade do Sol.

singularidades severas (por exemplo, atraentes não integráveis) na origem, aparecem como um campo privilegiado para a exploração e compreensão do comportamento termo-estático anômalo

Considerando o comportamento apresentado pelos XRBS, no que tange as interações de longo alcance, além das singularidades apresentadas pelos buracos negros e estrelas de nêutrons, entre outros já citados neste trabalho, consideramos a termoestatística de Tsallis como forte candidata a descrever o fenômeno aqui estudado, isto é, as emissões de raios-X em forma de curvas de luz analisadas estatisticamente.

2.6.1 A Mecânica Estatística clássica e seu conceito de entropia

O conceito de entropia, ainda muito utilizado na Termodinâmica, foi inicialmente introduzido por Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888) em 1865. A Eq. (6), a seguir, denota o significado do conceito de entropia, em que δQ representa o calor que é transferido de um corpo de temperatura mais alta para outro de menor temperatura,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (6)$$

e T é a temperatura absoluta do corpo quente. Foram, no entanto, o austríaco Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) e o estadunidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903) os criadores da teoria da mecânica estatística que hoje recebe seus nomes. O que eles fizeram, basicamente, foi associar o conceito de entropia a um tratamento probabilístico de sistema que possua microestados (i) com probabilidades p_i (BETZLER, 2015).

Segundo Betzler (2015), um gás ideal constituído de N partículas de movimento aleatório e cuja interação se dá somente quando as mesmas colidem elasticamente, pode exemplificar o que seja um microestado. Enquanto que um microestado (i) deste gás seja a definição da posição e do momento linear de cada

uma das partículas em um dado instante, um macroestado deste mesmo gás é definido a partir de variáveis de estado: pressão, volume, temperatura e o número N de partículas.

Sendo N um número muito grande (da ordem do número de Avogadro, por exemplo), a probabilidade será muito pequena, reduzindo a possibilidade de que se produza um aumento espontâneo da pressão do gás. Além disso, pelo segundo princípio da termodinâmica, as transformações que ocorrem de modo espontâneo são irreversíveis. Os processos irreversíveis (difusão de um gás, condução de calor entre dois corpos a diferentes temperaturas, etc) em sistemas isolados tende a sempre aumentar.

2.6.2 Postulados e hipóteses

O postulado fundamental da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), afirma que em um sistema isolado e em equilíbrio, todas as possibilidades microscópicas compatíveis com sua informação são equiprováveis (TSALLIS; RUIZ, 2011), isto é, o sistema em questão tem igual probabilidade de estar em quaisquer de seus microestados acessíveis.

Cabe ressaltar, segundo Tsallis & Ruiz (2011), que o mais importante neste postulado de BG não é tanto o conceito de equiprobabilidade, mas sim o que se refere ao espaço o qual se insere tal equiprobabilidade. Este é o espaço de fases μ , associado a uma única partícula por Boltzmann, que foi posteriormente generalizado por Gibbs ao espaço de todas as partículas do sistema. Isto pressupõe que todos os estados pertencentes à hipersuperfície isoenergética do espaço de fases do sistema isolado são admissíveis, embora existam sistemas em que os estados admissíveis constituem um subconjunto da mencionada hipersuperfície isoenergética.

É razoável supor que a equiprobabilidade na totalidade da superfície equienergética ocorra quando a dinâmica (não linear) do sistema seja suficientemente caótica, o que, tecnicamente equivale a dizer que ao menos um expoente de Lyapunov⁷ seja positivo -, de modo que praticamente toda a

⁷ O expoente de Lyapunov retrata a velocidade de fase entre pontos próximos, dentro do espaço de fases, e também o quanto eles aproximam-se ou afastam-se em um sistema dinâmico. Ele determina o quão caótico,

hipersuperfície seja visitada em um tempo relativamente curto (TSALLIS, 2009).

Determinar as condições para que isto ocorra é uma discussão matematicamente complexa, conhecida como problema ergódico. A hipótese ergódica afirma que, sob certas condições, qualquer que seja uma determinada variável dinâmica X , sua média temporal, evidenciada na Eq. (7) a seguir, é igual a média do *ensemble*⁸ (TSALLIS; RUIZ, 2011).

$$\overline{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T X(t) dt \quad (7)$$

A média de *ensemble* $\langle X \rangle$ é definida, partindo-se da hipótese de que nenhum dos sistemas é privilegiado, sendo:

$$\langle X \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i(t) \quad (8)$$

Quando a média de *ensemble* é constante no tempo, o sistema alcança o estado estatístico estacionário. A expressão “equilíbrio térmico” se aplica ao caso particular de estado estatístico estacionário em que todo o espaço de fases seja visitado.

Assim, a hipótese ergódica, em termos matemáticos, afirma:

$$\overline{X} = \langle X \rangle \quad (9)$$

Todo o problema da ergodicidade gira em torno das condições que permitem

não caótico ou no limiar da caoticidade se encontra o sistema. Normalmente leva-se em consideração somente o maior expoente de Lyapunov (MEL), uma vez que o mesmo denota o comportamento do sistema como um todo. Geralmente, quando o MEL é positivo, o sistema diverge; Quando negativo, o espaço de fases se contrai, ou seja, age como um sistema estacionário ou de periodicamente estável, embora seja dissipativo. Por fim, quando o somatório dos MEL é nulo, o sistema é conservativo (KANTZ; SCHREIBER, 2004).

⁸ O *ensemble* pode ser entendido como o conjunto dos M sistemas independentes e equivalentes, isto é, compatíveis com a informação que dispomos dele. Tipicamente o conjunto de todas as possíveis condições iniciais admissíveis X_i , $i = 1, \dots, M$. Assim, o conceito de ensemble, ou ensemble estatístico, é uma idealização que consiste em considerar um grande número de “cópias” virtuais do sistema, com cada uma representando um estado físico possível de forma que se possa obter as propriedades de sistemas termodinâmicos a partir das leis da Mecânica clássica ou quântica (TSALLIS; RUIZ, 2011).

que se verifique esta igualdade (BOWEN, 1975).

Retornando ao conceito de entropia, na mecânica estatística de BG, ela é dada por:

$$S = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i \quad (10)$$

onde k é a constante de Boltzmann, p_i e w são a probabilidade e a quantidade de microestados compatíveis com o macroestado do sistema.

Na ocorrência de equiprobabilidade dos microestados:

$$p_i = \frac{1}{W} \quad (11)$$

, então a entropia passa a ser expressa por:

$$S = k \ln W \quad (12)$$

Esta equação, conhecida como entropia de Boltzmann, é uma das expressões fundamentais da mecânica estatística clássica. Desde sua formulação existe o interesse em esclarecer se o princípio de Boltzmann poderia ser obtido da dinâmica microscópica uma vez que se refere a estados microscópicos (BETZLER, 2015).

2.6.3 A mecânica estatística e a não extensividade

Na MEBG, a entropia de um sistema composto de várias partes é muito frequentemente igual à soma das entropias de todas as partes. Isto é verdade se a energia do sistema é a soma das energias de todas as partes e se o trabalho realizado pelo sistema durante uma transformação é igual a soma das quantidades de trabalho executadas por todas as partes. Essas condições não são óbvias e, em

alguns casos, elas podem não ser cumpridas (FERMI, 1956, p. 62). Portanto, quando não satisfestas todas as condições, então deve-se considerá-las com atenção e tentar adequar às situações de forma mais coerente, uma vez que a expressão para a entropia, dada por Boltzmann, não é universal.

O Quadro 1, a seguir, mostra algumas características referentes a sistemas tipicamente simples em comparação com os tipicamente complexos.

Quadro 1 Características dos sistemas complexos

Sistemas tipicamente simples	Sistemas tipicamente complexos
e.g. $W(N) \propto \mu^N (\mu > 1)$	e.g. $W(N) \propto N^\rho (\rho > 0)$
Equação de Fokker-Planck linear/homogênea	Equação de Fokker-Planck não linear/não homogênea
Curva gaussiana	Curva q-Gaussiana
Correlações de curto alcance no espaço-tempo	Correlações de longo alcance no espaço-tempo
Processos markovianos (memória curta)	Processos não-markovianos (memória longa)
Alta caoticidade (máximo expoente de Lyapunov positivo)	Baixa caoticidade (máximo expoente de Lyapunov é nulo)
Muitas interações de curto alcance	Muitas correlações de longo alcance presentes
Entropia de Boltzmann-Gibbs (aditiva)	Entropia S_q (não aditiva)
Ergótico ⁹	Não-ergótico

Fonte: Tsallis, 2009 (adaptado)

Conforme vemos na primeira linha do quadro 1, nos sistemas tipicamente simples a entropia é proporcional à W , logo é extensiva¹⁰. Em contrapartida, nos sistemas complexos, em vez de crescerem exponencialmente com N , crescem com uma lei de potência, tornando este número muito menor ($N \ll \mu$).

Com isto, na proposta entrópica de Tsallis, que é uma generalização da Entropia de Boltzmann-Gibbs, parece descrever acuradamente comportamentos

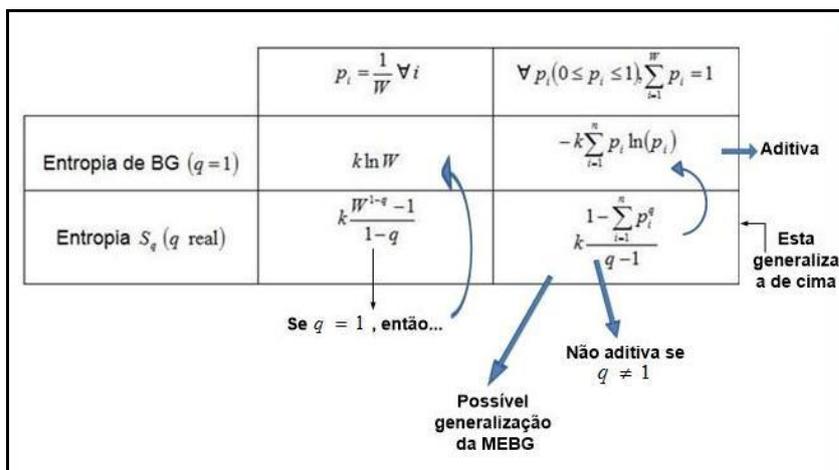
⁹ Ergótico é todo sistema cuja média temporal coincide com a média de ensemble, que também é a média das condições iniciais.

¹⁰ Ser extensiva significa que a entropia é proporcional ao número de partículas, isto é, é proporcional à massa. Isto é uma exigência da termodinâmica.

complexos, que obedecem uma lei de potência, que é o caso da proposta de difusão de raios-X nas XRBSs prospectadas e na modelagem que pretende-se nesta pesquisa.

Esta fenomenologia tem consequências derivadas dessa entropia não-aditiva e não extensiva e fechada com postulador ilustrados na Figura 7 mostra alguns postulados para a função entropia para efeitos de comparação na MEBG e a S_q .

Figura 7 Postulados para a função entropia



Fonte: Adaptação de Tsallis, 2009.

Para continuar respeitando as leis da termodinâmica, é necessário que, para continuar sendo extensiva, a S_q seja utilizada nos sistemas, conforme ilustra o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 Aditividade e extensividade

Sistemas	Entropia S_{BG} (aditiva)	Entropia S_q ($q < 1$) Não aditiva
Interações de curto alcance.	Extensiva	Não extensiva
Interações de longo alcance.	Não extensiva	Extensiva

Fonte: (Adaptação de Tsallis, 2009).

Neste cenário surge a demanda de modelagem através da proposta de equação de probabilidades de Fokker-Planck.

2.7 A equação de Fokker-Planck: origens e dedução

2.7.1 Conceitos e origens

A palavra *estocástico* advém do grego clássico, *στοχαστικές*, que significa “mirar” ou “lidar segundo hipóteses” e que modernamente se entende por *aleatório* (DAHMEN, 2008).

Segundo Dahmen (2008), a física dos sistemas estocásticos difere da mecânica quântica no que tange a aleatoriedade, porque enquanto a segunda é iminentemente probabilística, na primeira a probabilidade torna-se inerente muito mais pela impossibilidade que temos de conhecer e, portanto, determinar todas as condições de contorno relacionadas a todas as constituintes do sistema.

A consequência disto é que equações do movimento, embora determinísticas a priori, não podem ser integradas, nos encaminhando à utilização do conceito de *ensemble* estatístico. O estudo e a dedução deste programa metodológico levou ao surgimento da mecânica MEBG, que inclui a equação de Fokker-Planck, tendo esta última a mesma natureza mecânica da física estatística clássica, não estando, de modo algum, segundo Dahmen (2008), relacionado à mecânica quântica.

Ainda de acordo com o preconiza Dahmen (2008), a equação de Fokker-Planck é utilizada para descrever processos estocásticos e possui aplicações em muitos ramos da física, química e biologia. Por exemplo, na física, na teoria do movimento Browniano, que descreve o movimento aleatório de uma partícula imersa em um fluido, a equação de Fokker-Planck analisa a dinâmica de sistemas fora do equilíbrio, que possui uma vasta aplicação em sistemas físicos mais completos e por isto mais complexos. Em particular, essa equação é usada para tratar processos que envolvem todos os fenômenos difusivos, em especial a evolução temporal da distribuição de probabilidade destes sistemas referente às posições das partículas em processos difusivos, e no contexto aqui tratado, as distribuições estatísticas das amplitudes da onda eletromagnética detectada em sistemas binários que as emitem na frequência característica dos Raios-X, pois a equação de Fokker-Planck não descreve somente propriedades estacionárias, mas também a dinâmica de sistemas

dependentes do tempo.

2.7.2 Dinâmica da EFP

Em vez disso, imagina-se uma dinâmica regida por uma força irregular, que pode levar a dois viéses de um mesmo caminho: no primeiro, a probabilidade entra diretamente nas equações do movimento, na forma de uma força estocástica ou um ruído. Isto é, uma equação estocástica para grandezas físicas mensuráveis, a exemplo das intensidades das amplitudes de uma fonte única de Raios-X, mas sabe-se que este caso pode ser regido por uma equação específica, a equação de Langevin (DAHMEN, 2008), que tem a sua forma geral:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t) \quad (13)$$

sendo que as variáveis desta equação podem assumir diversas interpretações ou significados, em função do que se deseja modelar com elas. Assim, para casos indexados aos processos da mecânica clássica, a variável x pode ser considerada uma coordenada generalizada, podendo ser definida como posição, velocidade ou a própria amplitude em análise.

A função $f(x)$ pode agir como uma força, quando a variável x representar a velocidade, e a função $\xi(t)$ uma função estocástica do ruído, que é o elemento perturbador do sistema, com as seguintes propriedades:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \text{ média nula.} \quad (14)$$

e representada por um pulso instantâneo e deslocado no tempo, se for o caso, indicado por uma função delta de Dirac:

$$\langle \xi(t) \cdot \xi(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'), \quad (15)$$

onde as variáveis $\xi(t)$ e $\xi(t')$ são independentes para t diferente de t' (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001). No caso da modelagem da emissão de raios-X oriundos de pares binários estelares, os ruídos podem ser considerados como elementos perturbadores deste processo.

Por exemplo, irregularidades na taxa de emissão das próprias estrelas envolvidas, elementos orbitais às próprias estrelas, tais como planetas, cometas e outros astros de menor volume, mas que de alguma forma obstaculizam a continuidade do processo de emissão.

Em outro contexto, toma-se uma equação determinística que é escrita para a distribuição de probabilidades das grandezas físicas mensuráveis, por exemplo, as amplitudes de mais de uma fonte emissora e em uma dinâmica de rotação a qual não é sabido como determinar todas as suas condições de contorno, a ponto de, mesmo sendo uma análise clássica, ter-se que constituir uma análise estatística (FRANK, 2005).

2.7.3 Consideração para obtenção da EFP

Neste viés, pode estar inserida uma equação de Fokker-Planck, ao considerar $P(x, t)$ a distribuição de probabilidade e $W(x, t + \Delta t | x', t)$ a probabilidade de transição entre os estados das amplitudes dos raios-X analisados, obtendo:

$$P(x, t + \Delta t) = \int W(x, t + \Delta t | x', t) \cdot P(x', t) dx' \quad (16)$$

Assim, a equação de Fokker-Planck é obtida considerando transições entre dois estados próximos, isto é, quando x se aproximar do estado mais próximo a ele, ou, quando x se aproximar de x' (RISKEN, 1984).

A expressão da Eq. (16) pode ser aproximada com bastante precisão por diversas formas, conforme descrito no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3 Formas de aproximar uma função

Nomenclatura	Relação Matemática/Notação	Considerações e justificativas
Aproximação polinomial	$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x_i$	<p>Trata-se de uma alternativa à aproximação por série de Taylor sem mensuração dos eventuais erros de truncamento. Não é a melhor opção para a expansão da equação, uma vez que não considera a existência de erro e requer a expansão em muitos termos.</p>
Frações continuadas	$f(x) \cong b_0 + \frac{a_1(x)}{b_1(x) + \frac{a_2(x)}{b_2(x) + \frac{a_3(x)}{b_3(x) + \dots}}}$	<p>Embora seja uma alternativa à aproximação por série de Taylor (com algumas limitações de estimativa do erro de truncamento e do conhecimento das frações utilizadas), é necessário fazer uso recursivo de valores numéricos que precisam ser conhecidos previamente, o que impossibilita a escolha deste método neste trabalho, pois não temos como determinar os termos em frações.</p>
Funções racionais (ou razão polinomial)	$f(x) \cong \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}$	<p>A maior desvantagem está no fato de que os valores aproximativos oscilam de modo não necessariamente convergente, ou seja, existem oscilações na convergência que dependem de cada polinômio. Não é a melhor escolha, já que a expansão polinomial também não pressupõe a existência de erros.</p>
Séries de Fourier	$f(x) \cong a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)]$	<p>Necessitam de periodicidade da função em expansão, o que não é, necessariamente, o caso.</p>
Séries de Potência	$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \left[f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right]$	<p>Considerada, como melhor aproximação, uma vez que, além de garantir a convergência, possibilita estimar o erro de truncamento, dado por</p> $R_n(x) \cong \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ <p>e $\xi(x) \in [x_0, x]$, que no nosso caso, é visto como a continuidade da evolução dos estados do sistema estudado.</p>

Fonte: (Adaptação de Tsallis, 2009).

A partir das justificativas dadas na Tabela acima, torna-se mais cômodo utilizar a expansão em série de Taylor como melhor forma de expressar a Eq. (16), já que é uma expressão funcional e não necessariamente periódica, não sendo expressa em frações parciais ou racionais. Além disso, como as diferenças entre x e x_0 vão ser sempre mínimas - já que a mudança de um estado para outro no sistema aqui tratado pode ser considerada como infinitesimal - o erro estimado da aproximação

será também sempre mínimo, mesmo para expansões que resultem em polinômios de baixas potências.

É possível, portanto, escrever a expansão em série de Taylor do produto $W(x, t + \Delta t | x', t) \cdot P(x', t)$ até a segunda ordem, que nos leva a equação (17) a seguir:

$$W(x, t + \Delta t | x', t) \cdot P(x', t) = \Omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Omega_{(x,t)}^{(n)} \frac{(x_0 - x)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Omega_{(x,t)}^{(n)} \frac{(\Delta x)^n}{n!} (-1)^n \right] \quad (17)$$

Pois $(x_0 - x)^n = [-1(x - x_0)]^n = (x - x_0)^n (-1)^n = (\Delta x)^n (-1)^n$, o que nos fornece a Eq. (18), que é a expansão em Série de Taylor da transição de estados do sistema,

$$W(x, t + \Delta t | x', t) \cdot P(x', t) = \Omega_{(x,t)}^{(0)} - \Delta x [\Omega_{(x,t)}^{(1)}] + \frac{\Delta x^2}{2} [\Omega_{(x,t)}^{(2)}] - \frac{\Delta x^3}{6} [\Omega_{(x,t)}^{(3)}] + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} (-1)^n [\Omega_{(x,t)}^{(n)}] \quad (18)$$

implicando nos termos principais desta expansão, levando-nos às equações a seguir:

$$\Omega_{(x,t)}^{(0)} = W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \cdot P(x, t) \quad (19)$$

$$\Omega_{(x,t)}^{(1)} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) + P(x, t) \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \quad (20)$$

$$\Omega_{(x,t)}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) + P(x, t) \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] \quad (21)$$

$$\Omega_{(x,t)}^{(2)} = \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} + P(x, t) \frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \quad (22)$$

$$\Omega_{(x,t)}^{(2)} = \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) + 2 \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} + P(x, t) \frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \quad (23)$$

Neste ponto, substituindo na integral da Eq. (18) e integrando-a em $d(\Delta x)$, obtemos:

$$\int W(x, t + \Delta t | x', t) P(x', t) d(\Delta x) = \int \left\{ \Omega_{(x,t)}^{(0)} - \Delta x [\Omega_{(x,t)}^{(1)}] + \frac{\Delta x^2}{2} [\Omega_{(x,t)}^{(2)}] + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} [\Omega_{(x,t)}^{(n)}] (-1)^n \right\} d(\Delta x) \quad (24)$$

Como a integral da soma é a soma das integrais, temos:

$$P(x', t) \int W(x, t + \Delta t | x', t) d(\Delta x) = P(x', t) = \int \Omega_{(x,t)}^{(0)} d(\Delta x) - \int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) + \dots + \int \frac{\Delta x^n}{n!} \Omega_{(x,t)}^{(n)} (-1)^n d(\Delta x) \quad (25)$$

2.7.4 A truncagem da série expandida

Considerando apenas a expansão em série de Taylor de forma aproximada até seu termo quadrático (pois Δx sempre será próximo de zero (uma vez que o sistema evolui continuamente), obtemos:

$$P(x, t + \Delta t) = \int \Omega_{(x,t)}^{(0)} d(\Delta x) - \int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) + \sum_{i=3}^n \left\{ \int \left[\frac{\Omega_{(x,t)}^{(i)}[\xi(x)]}{(i)!} (\Delta x)^i \right] d(\Delta x) \right\} \quad (26)$$

Pois, o termo final, que representa o resíduo em truncamento, e que será sempre muito inferior aos demais, mesmo com a sua integração, pois além de os numeradores serem muito pequenos separadamente e o denominador grande, os produtos e divisões serão sempre menores ainda, o que o torna desprezível todo o resíduo.

Assim, uma aproximação generalizada da equação é obtida:

$$P(x, t + \Delta t) \cong \int \Omega_{(x,t)}^{(0)} d(\Delta x) - \int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) \quad (27)$$

Calculando as integrais separadamente, temos:

$$\int \Omega_{(x,t)}^{(0)} d(\Delta x) = \int [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \cdot P(x, t)] d(\Delta x) = P(x, t) \int [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) = P(x, t) \quad (28)$$

$$\int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) = \int \Delta x \left[\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) + P(x, t) \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) \quad (29)$$

$$\int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) = \int \Delta x \left[\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \right] d(\Delta x) + \int \Delta x \left[P(x, t) \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) \quad (30)$$

$$\int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \Delta x [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) + P(x, t) \int \Delta x \left[\frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) \quad (31)$$

$$\int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) = \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \right] d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[2 \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[P(x, t) \frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \right] d(\Delta x) \quad (32)$$

$$\int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) = \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \int \frac{\Delta x^2}{2} [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[2 \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) + P(x, t) \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \right] d(\Delta x) \quad (33)$$

A Eq. (33) pode ser reescrita como sendo a aproximação generalizada expandida:

$$\begin{aligned}
P(x, t + \Delta t) &= \int \Omega_{(x,t)}^{(0)} d(\Delta x) - \int \Delta x \Omega_{(x,t)}^{(1)} d(\Delta x) + \int \frac{\Delta x^2}{2} \Omega_{(x,t)}^{(2)} d(\Delta x) = P(x, t) - \\
&\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \Delta x [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) - P(x, t) \int \Delta x \left[\frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) + \\
&\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \int \frac{\Delta x^2}{2} [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[2 \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) + \\
&P(x, t) \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \right] d(\Delta x)
\end{aligned} \tag{34}$$

que pode ser representada pela equação 35:

$$\begin{aligned}
P(x, t + \Delta t) - P(x, t) &= \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \Delta x [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) - \\
P(x, t) \int \Delta x \left[\frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) &+ \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \int \frac{\Delta x^2}{2} [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) + \\
\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[2 \frac{\partial W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x} \right] d(\Delta x) &+ P(x, t) \int \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)}{\partial x^2} \right] d(\Delta x)
\end{aligned} \tag{35}$$

E que pode ser reescrita, sabendo que:

$$\langle \Delta x \rangle = \int \Delta x [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) \tag{36}$$

E que

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int \Delta x^2 [W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t)] d(\Delta x) \tag{37}$$

Gerando, com a expansão em série de Taylor:

$$\begin{aligned}
P(x, t + \Delta t) - P(x, t) &= - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \langle \Delta x \rangle - P(x, t) \frac{\partial \langle \Delta x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2} + \\
\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \langle \Delta x^2 \rangle}{\partial x} &+ \frac{P(x, t)}{2} \frac{\partial^2 \langle \Delta x^2 \rangle}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Considerando a expressão de Langevin e as propriedades da função de ruído, concluímos que

$$\langle \Delta x \rangle = f(x) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi(t') \rangle dt' = f(x) \Delta t, \quad (39)$$

obtendo:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = [f(x)]^2 \Delta t^2 + 2 f(x) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi(t') \rangle dt' + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' d\tau \langle \xi(t') \xi(\tau) \rangle \quad (40)$$

Que pode ser escrita como expressão simplificada para variação média quadrática de x:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = [f(x)]^2 \Delta t^2 + \int_t^{t+\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d\tau \Gamma \delta(t' - \tau) \quad (41)$$

que também pode ser escrita conforme a Eq. (42), que indica a expressão para variação média quadrática de x:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = [f(x)]^2 \Delta t^2 + \Gamma \int_t^{t+\Delta t} dt' = [f(x)]^2 \Delta t^2 + \Gamma \Delta t \quad (42)$$

Obtemos, assim, o formato finito da Equação de Fokker-Planck, conforme verificado na Eq. (43):

$$P(x, t + \Delta t) - P(x, t) = -f(x) \Delta t \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) \Delta t \right) P(x, t) + \frac{1}{2} \left[[f(x)]^2 \Delta t^2 + \Gamma \Delta t \right] \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left([f(x)]^2 \Delta t^2 + \Gamma \Delta t \right) \right) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left([f(x)]^2 \Delta t^2 + \Gamma \Delta t \right) \right) P(x, t). \quad (43)$$

Normalizando e aplicando o limite infinitesimal, ambos em t , chegamos à:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} \right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ -f(x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) P(x, t) + \frac{1}{2} \left[[f(x)]^2 \Delta t + \Gamma \right] \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left([f(x)]^2 \Delta t + \Gamma \right) \right) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left([f(x)]^2 \Delta t + \Gamma \right) \right) P(x, t) \right\} \quad (44)$$

O que nos dá, finalmente a equação de Fokker-Planck, Eq. (45), a seguir:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x) P(x, t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (45)$$

A EFP é uma equação de probabilidade, logo, pode ser também a probabilidade da ocorrência de uma certa amplitude. Nesta pesquisa, os dados são os registros de amplitude de radiação na frequência de raios-X. A função $f(x)$ da Eq. 45, denota uma amplitude da radiação, ou a intensidade da mesma. É possível, portanto, considerar a aplicação da EFP como sendo a amplitude da radiação ou a ocorrência da probabilidade da mesma. As condições de contorno são os dados numéricos coletados pelo satélite Rossi, representativos das emissões de raios-X.

A EFP, historicamente, tem seu marco inicial na equação do movimento *browniano*, podendo chegar à mesma por diversos percursos, tais como o uso de transformadas de Fourier, o uso de propriedades da função delta de Dirac aplicada aos conceitos de probabilidade dos estados do sistema, e, por fim, ao caminho adotado neste trabalho, onde é feita a expansão da função de estado, normalizando-a em função do tempo ao final da expansão (RISKEN, 1984, p. 62-65).

2.7.5 Generalização da EFP

O uso de uma notação mais geral nos leva à Eq. (46), que também é a Equação de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x).P(x, t)^\mu] + Q. \frac{\partial^2 [P(x, t)]^\nu}{\partial x^2} \quad (46)$$

Os índices que surgem nesta equação (Eq. 46) são constantes reais

ajustadas a depender do sistema, e podem estar relacionados à difusão anômala, bem como determinadas em função das condições de contorno. Em função dos dados reais coletados sobre as amplitudes dos raios-X das XRBS, conclui-se que, para cada par binário de estrelas analisados, existiram valores específicos e diferenciados para estas constantes e índices.

Em geral, para cada par binário de estrelas é possível pressupor valores referentes às constantes, obtendo diferenciações no formato das soluções da equação, chegando a uma equação de Fokker-Plank para cada caso, bem como a sua respectiva solução. Se o índice μ assume valor igual 1, então a distribuição de probabilidades dada na Eq. 46 associa-se imbricadamente a sistemas não extensivos e maximizam a q-entropia tsalliana.

A Eq. 46 passa a ser escrita como a equação diferencial parcial não linear parabólica descrita a seguir:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x).P(x,t)] + Q \cdot \frac{\partial^2 [P(x,t)]^v}{\partial x^2} \quad (47)$$

Equações desta categoria são de difícil solução e, como consequência, existem ainda poucas delas descritas na literatura. Nossa proposta é a dedução e posterior solução analítica particular, caso seja possível, e numérica, para fins de comparação de resultados.

Na solução numérica, uma possibilidade é a utilização do método das diferenças finitas, que discretiza o espaço contínuo da função de probabilidade $P(x,t)$. A desvantagem do método é o enorme esforço computacional necessário para obtenção de soluções o mais próximas possível de uma solução analítica.

O objetivo principal desta pesquisa, já mencionado anteriormente, é a modelagem com posterior dedução e resolução de uma equação de Fokker-Planck do tipo descrito na Eq. 34, que descreva o fenômeno de difusão anômala existente na emissão dos raios-X nas XRBS.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se os aspectos metodológicos da pesquisa, suas definições, processos, bases e dados utilizados para as premissas básicas das hipóteses da pesquisa. Contextualiza-se os aspectos inovadores da pesquisa, com o uso híbrido da literatura, dos dados e do método singular da solução iterativa e exata do método da decomposição de Adomian bem como as suas fórmulas de recorrência.

3.1 Classificação metodológica

Para cumprimento dos objetivos, utilizamos uma metodologia baseada na revisão de literatura (LAKATOS; MARCONI, 2019) dos conceitos de mecânica estatística, dos métodos de modelagem de equações diferenciais parciais sobre fenômenos difusivos, e dos métodos de solução de equações diferenciais parciais não lineares, em especial os métodos lastreados na teoria das perturbações e propriedades homotópicas dos operadores indexadas às mesmas, a exemplo do método de decomposição de Adomian e métodos derivados do mesmo além dos processos de escrita e formatação preconizados nas normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

São aqui consideradas a descrição da origem e a coleta e tratamento dos dados experimentais que balizam a modelagem. Estes dados são as condições de contorno da equação proposta na busca de sua solução.

A metodologia desta pesquisa baseia-se na revisão de literatura das áreas de física estatística, astrofísica e matemática, com foco nas técnicas analíticas com suporte numérico, afim de modelar a emissão de raios-X em sistemas estelares binários. Baseamo-nos nos dados experimentais coletados pelo satélite "Rossi X-ray timing Explorer" de um conjunto de 142 estrelas ou pares binários analisados.

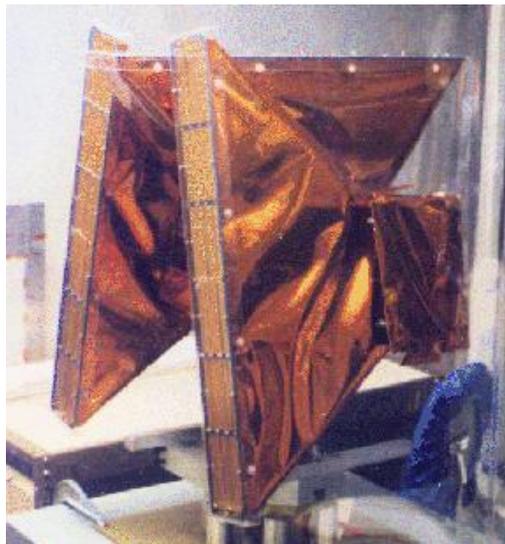
3.2 Universo de pesquisa: X-Ray Timing Explorer (RXTE) e as XRBSs

Com fins de ampliar pesquisas que contemplem estes temas, o X-Ray Timing Explorer (RXTE) foi lançado em órbita terrestre baixa em 30 de dezembro de 1995 e foi desativado em 5 de janeiro de 2012. Os terabytes de dados no arquivo RXTE são utilizados em pesquisas diversas por todo o mundo, com inúmeras publicações em revistas especializadas (ROSSI, 2018).

Uma missão da NASA originalmente prevista para lançamento em agosto de 1995, mas que foi lançada em 30 de dezembro de 1995, foi projetada para facilitar o estudo da variabilidade de tempo na emissão de fontes de raios X com resolução espectral moderada. As escalas de tempo de microssegundos a meses são cobertas em uma faixa espectral instantânea de 2 a 250 keV. Ele é projetado para um tempo de vida necessário de dois anos, uma meta de cinco anos.

O RXTE (Timing Explorer de Raios-X) da Rossi foi um satélite que observou a variação temporal das fontes de raios-X astronômicos. Consistiu de três instrumentos: um Monitor All Sky, o Contador Proporcional e o Experimento de Temporização de Raios-X de Alta Energia (HEXTE), conforme observa-se na Figura 8 a seguir:

Figura 8 The All-Sky Monitor



Fonte: Equipes ASM / RXTE no MIT e no RXTE SOF e GOF no GSFC da NASA

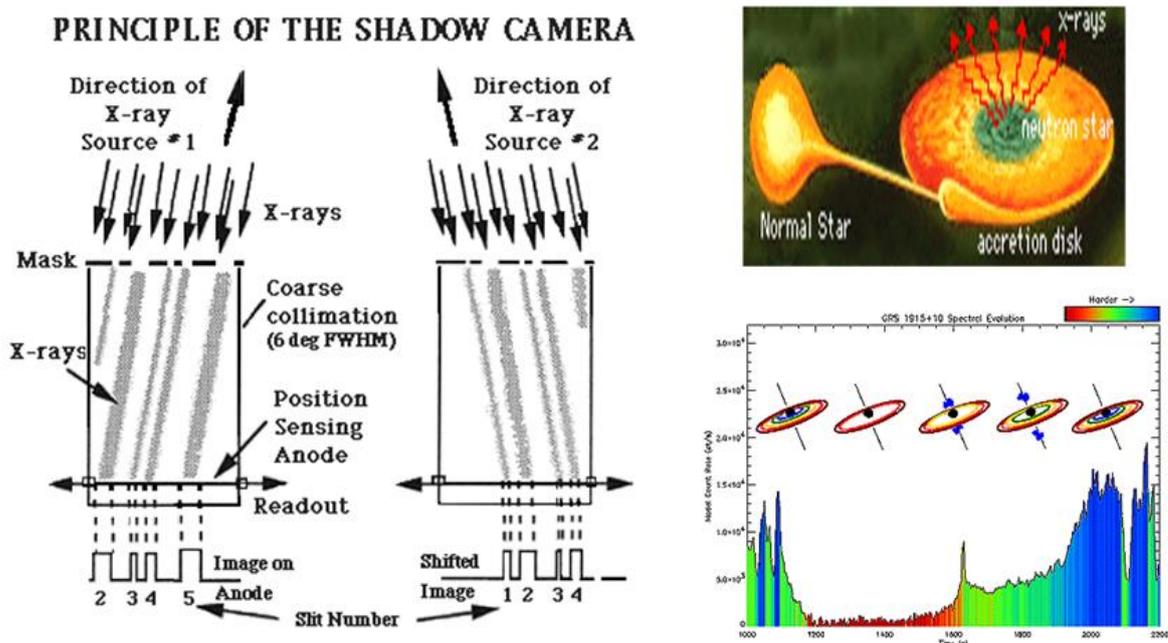
O RXTE observou raios X de buracos negros, estrelas de nêutrons, pulsares de raios X e rajadas de raios-X. Foi financiado como parte do programa Explorer (ou Explorer 69).e tinha massa de 3200 kg e foi lançado do Cabo Canaveral em 30 de dezembro de 1995 em um foguete Delta. Seu designador internacional é 1995-074A.

A missão transportava dois instrumentos pontiagudos, o Proportional Counter Array (PCA) desenvolvido pelo GSFC para cobrir a parte inferior da faixa de energia e o High-time X-ray Timing Experiment (HEXTE), desenvolvido pela UCSD, cobrindo a faixa de energia superior.

O MIT forneceu um Monitor All-Sky (ASM) que verifica cerca de 80% do céu a cada órbita, permitindo monitoramento em escalas de tempo de 90 minutos ou mais, e um Sistema de Dados de Experimento (EDS) integrado que processa os dados do PCA e ASM. O ASM observava as fontes de raios X mais brilhantes para a variabilidade e também alertava a comunidade quando novas fontes aparecerem.

É importante considerar que o All-Sky Monitor (ASM) têm câmeras que utilizam-se das sombras de projeção de raios-X, denominadas de câmeras de sombra, e estas usam máscaras de fenda para produzir padrões de sombra em um detector que é preenchido com Xenon, conforme elencado na Figura 9, a seguir:

Figura 9 The All-Sky Monitor



Fonte: Equipes ASM / RXTE no MIT e no RXTE SOF e GOF no GSFC da NASA

Onde os padrões de diferentes fontes são sobrepostos para determinar a intensidade e a direção de uma fonte individual, de forma que o ASM varre 80% do céu a cada 90 minutos e é usado para medir a variabilidade de longo prazo de fontes brilhantes de raios-X.

Para esta pesquisa foram analisadas 142 XRBS, separadas nos seguintes grupos:

- Grupo 1: BHC + HM (Black Hole Candidate + High Mass);
- Grupo 2, composto por BHC + LM (Black Hole Candidate + Low Mass);
- Grupo 3, com HM + PSR (High Mass + Pulsar);
- Grupo 4, composto pelo par LM + NS (Low Mass + Star Neutron);
- Grupo 5, com a dupla SNR + PSR (Supernova Remnant + Pulsar).

São considerados os sinais de amplitude das ondas de raios-X, de modo que a entropia termodinâmica de *Boltzman* e *Gibbs* é considerada apropriada apenas sob estritas condições, tais como homogeneidade, interações de curto alcance entre os elementos do sistema e em um contexto ergódico, que costumam ser caracterizados matematicamente e computacionalmente por meio de equações lineares e distribuições estacionárias gaussianas (RIBEIRO, 2012).

Nos sistemas cujos elementos são fortemente correlacionados, a entropia tsalliana (sempre não-aditiva), torna-se não-extensiva para um valor apropriado do parâmetro q , denominado de índice entrópico. Sistemas que apresentam estados estacionários, ou quase-estacionários, que não são consistentemente descritos pela estatística de *Boltzmann*, são não-aditivos.

Eles são normalmente melhor caracterizados por correlações de longo alcance, espaciais e temporais; processos não-markovianos; equações não-lineares e distribuições não-gaussianas, como é o caso do objeto de estudo de nossa pesquisa, as XRBS. Neste caso estes sistemas são não-extensivos, pois as grandezas termodinâmicas se comportam dessa maneira, como pudemos verificar

por meio de análise estatística. Nesta pesquisa pretendemos determinar analiticamente os resultados, comparando-os com os dados estatísticos já obtidos.

O universo desta pesquisa, portanto, está dividido em duas partes: teórica e experimental. São considerados os conceitos históricos da física estatística clássica nos seus modelos da termoestatística convencional de Boltzman e Gibbs, no que tange à parte teórica, juntamente com as técnicas de solução da equação em modelagem (ARAÚJO, 2011) e com foco no método da decomposição de Adomian, com conseqüente dedução e modelagem de uma equação de Fokker-Planck para descrever o comportamento difusivo das séries temporais de raios-X advindas das XRBS, e, nesse sentido, torna-se importante registrar que para propostas dos dados dos termos difusivos, restaurador bem como das condições iniciais para cada conjunto das XRBSs analisadas utilizou-se dos dados coletados para proporcionar estimativa destes valores numéricos e com isto foi possível a construção das hipóteses testadas, conforme evidencia-se no Apêndice A deste trabalho.

O aspecto experimental leva em consideração os dados indiretos coletados pelo satélite "Rossi X-ray timing Explorer", aliando procedimento numérico para o tratamento, separação e filtragem estatística dos dados e dos seus erros, que servirão como condições de contorno para a solução.

As premissas para a modelagem proposta são os trabalhos fundamentais que descrevem os fenômenos difusivos, em especial os estudos do processo, por meio da proposta teórica de J. B. Fourier, as leis de Fick e a equação da continuidade, além dos processos difusivos (anômalos ou não) descritos em modelos teóricos que trazem como premissa a derivabilidade (finitude, unicidade e continuidade) das respectivas funções soluções.

Levando em conta os presupostos do comportamento eletromagnético previstos pelas equações de J. K. Maxwell, bem como das ondas de raios-X registradas, serão avaliadas e determinadas as condições de contorno de uma equação de Fokker-Planck modelada para explicar este fenômeno, desde que em consonância com os valores de amplitude, fase e comprimentos de onda registrados pelos respectivos dados experimentais.

3.3 Homotopia e a Decomposição de Adomian

A forma de operações com as equações diferenciais permite normalizá-las em composição com operadores lineares e não lineares, quando for o caso, e a partir disto propriedades específicas com estes operadores dão margem a novas formas de resolvê-las.

A modelagem das equações diferenciais parciais, lineares e não-lineares, perpassam por um conjunto de métodos que podem ser classificados como sendo de cunho analítico e de cunho numérico. Os métodos analíticos podem ser admitidos por famílias de equações que podem resolver, por exemplo, as equações diferenciais parciais lineares de primeira ou segunda ordem e grau, por meio de métodos distintos, tais como da separação de variáveis ou por meio das séries com os métodos de Frobenius *etc.*

Métodos envolvendo a decomposição de funções nas suas séries de expansões permitem a resolução das mesmas de forma exata em forma de séries de potências convergentes (ARAÚJO, 2011). Do ponto de vista analítico tem-se o uso das formas clássicas que são a composição da solução de um problema associado de Sturm-Liouville, com a expansão da função solução em uma série em termos das autofunções, substituição desta função como expansão da equação de difusão-advectação e, finalmente, determinação dos coeficientes por meio de condições de contorno associadas (DEBNATH, 1997).

No tocante aos métodos numéricos, o método de diferenças finitas (DEBNATH, 1997) e (KRISHNAMURTHY; SEN, 2001), e os métodos de decomposição (ADOMIAN, 1994a), o de iteração variacional (HE, 1999; HE, 2000a; HE, 2000b; HE, 2005, HE, 2008), transformada integral, técnicas de diferenças finitas ponderadas, método de decomposição de Adomian (KHAN; AUSTIN, 2010), entre outros, são alguns também utilizados.

Nesta pesquisa adotou-se o método de perturbações para garantir que as funções envolvidas pudessem ser expandidas em séries de potências distintas e que se pudesse efetuar a decomposição das mesmas e dos operadores, lineares e não lineares, envolvidos na modelagem. Também isso permitiu a aplicação das propriedades da homotopia. A ideia fundamental é introduzir um parâmetro de

homotopia, que é o uso de caminhos distintos (neste caso, através do método variacional) para compor soluções equivalentes das equações diferenciais de um mesmo sistema físico. O sistema de equações então reduz-se, geralmente, a uma forma simplificada que admite uma solução mais simples.

Este método apresenta uma deformação de coeficiente funcional, com variação entre 0 e 1, de modo que, à medida que aumenta gradualmente para 1, o sistema passa por uma seqüência de deformação e a solução de cada uma das quais é próxima da etapa anterior de deformação. Assim, a forma original da equação e o estágio final de deformação dá o resultado desejado. Uma das características mais notáveis deste método é que a solução é alcançada de forma razoavelmente precisa em apenas alguns termos de perturbação.

A equação de Fokker-Planck é uma equação de difusão, que pode ser deduzida a partir da de Langevin, conforme dedução vista. Com seus termos espaciais e temporais, tem diversas aplicações na física estatística de Boltzmann-Gibbs (FRANK, 2005). A opção pela dedução teve o objetivo de tornar mais didática a exposição de todo o método aqui descrito.

O método de resolução aqui proposto é o método da decomposição de Adomian (ADM), que utiliza a edição das derivações envolvidas como sendo operadores lineares, com o método de perturbação homotópica (HPM), que é uma solução de um problema linear aplicado a um não linear, e que bem representa os processo difusivos de radiação de raios-X.

O termo linear pode ser resolvido por meio da transformada diferencial, enquanto os termos não-lineares podem ser obtidos com o uso dos polinômios de Adomian e expandidos um a um, gerando uma solução sem qualquer discretização ou hipóteses restritivas numéricas iterativas, que são tradicionais nos métodos numéricos mais conhecidos e utilizados, tais como método das diferenças finitas (DEBNATH, 1997) e (KRISHNAMURTHY; SEN, 2001), o da decomposição de Adomian (ADOMIAN, 1994a), além do método iterativo variacional (GOLBABAI; JAVIDI, 2007) e o da integral (BIAZER; GHAZVINI, 2009).

O algoritmo proposto fornece a solução em uma série numérica sempre convergente, de rápida convergência, que conduz à solução em forma fechada e exata, com a vantagem de ser um método que combina dois outros métodos

poderosos para a obtenção de soluções exatas de equações diferenciais parciais lineares e não-lineares.

Em topologia, uma homotopia é uma deformação de uma aplicação entre espaços topológicos, de modo que tais espaços (que são estruturas que permitem a formalização de conceitos, tais como convergência, conexidade e continuidade), possam ser alterados minimamente sem perda das suas propriedades, ou seja, possam ser alterados sem destruição das suas características.

Uma aplicação denominada de homotopia é aquela que ocorre entre duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ em espaços topológicos. Isto é, tais funções são topológicas se existir uma aplicação (função) contínua, $f : X \times [0,1] \rightarrow Y$, (homotopia), de modo que $\forall x \in X$ é possível escrever

$$\begin{cases} f(x,0) = x \\ f(x,1) = g(x) \end{cases} \quad (48)$$

Quando isso ocorre, dizemos que f é uma homotopia entre f e g e denota-se por:

$$f : f \simeq g \quad (49)$$

O Método de Perturbação de Homotopia considera a existência da equação diferencial parcial não linear:

$$A(u) - f(s) = g_{real} \quad (50)$$

com a condição de contorno

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (51)$$

onde:

$$A = \text{Operador diferencial geral} \quad (52)$$

e:

$$B = \text{Operador limite} \quad (53)$$

Este operador diferencial pode ser dividido em duas partes, uma linear e outra não linear, conforme equação 73:

$$\begin{cases} A(u) - f(N) = 0 \\ L(u) + N(u) - f(N) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

sendo $f(r)$ uma função analítica conhecida, que pode ser expandida em séries de Taylor:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right) (x - a)^n \quad (55)$$

De forma geral, o algoritmo do método de decomposição de Adomian para a solução da equação de Fokker-Planck pode ser descrito em poucas palavras, conforme especificado a seguir:

- 1) Escolhida a equação a ser resolvida, deve-se escrever a mesma de forma a identificar o operador linear (que neste caso é o operador de derivação, cujo inverso é a integração), bem como as funções $f(t)$ e $p(t)$ juntamente com operador não linear e as condições de contorno;
- 2) Uma vez identificado estes operadores, funções e condições de contorno, escreve-se a equação evidenciando o operador em um lado da igualdade e os demais termos do outro;
- 3) Aplica-se o operador inverso em ambos os lados da igualdade para que fique exposta a função incognita, visto que o operador inverso aplicado ao operador direto dá como resultado a função incognita) que neste caso terá como igualdade uma aplicação de operadores nas demais funções requerendo para tal a condição de contorno;

- 4) Tanto a função incógnita pode ser escrita como uma soma de funções particulares, como também a composição do operador inverso e demais funções podem ser escritas como combinações lineares dos polinômios de Adomian. Isto pode ser igualado devido à possibilidade de expandir-se em série de Taylor os operadores (linear e não linear), de forma que ambas as séries são igualadas, termo a termo, de mesma ordem de potência. Daí tem-se igualdades de cada termo e estas geram as fórmulas de recorrência para soluções particulares, uma a uma, da equação diferencial, de forma que a soma de todas as soluções particulares seja a solução geral;
- 5) Existem então duas fórmulas de recorrência: uma para gerar os polinômios de Adomian e outra para gerar as soluções particulares em função destes polinômios, das funções $f(t)$ e $p(t)$, além da condição de contorno, que acaba sendo o primeiro termo ou a primeira solução particular;
- 6) Considera-se como ferramenta de cálculos dos processos iterativos do método de decomposição de Adomian o uso do software Wolfram Mathematica na sua versão 12.1 e os desdobramentos de edição, programação (em software de alto nível interno);
- 7) Encontra-se então a solução geral como uma soma de termos de uma série que é gerada com a fórmula de recorrência geral do método. Esta série, que é a solução geral, é normalmente convergente, cuja solução é exata. Ao conhecer a fórmula geratriz desta série, é possível identificar a função que a mesma dá origem;

As soluções editadas em amostras do ensaiado encontram-se na sua íntegra, bem como programas, condições iniciais e coeficientes da EFP editadas no Apêndice B deste trabalho.

3.4 Itinerário metodológico

Nesta abordagem metodológica estão sendo revisitados os conceitos da termodinâmica estatística, além dos conhecimentos atuais sobre a interação entre as XRBS, de acordo com as leis de interação entre as mesmas.

Em seguida, modela-se uma equação de Fokker-Planck que explicita o processo de difusão de raios-X oriundo das mesmas e com os dados experimentais registrados pelo satélite Rossy, passamos à análise que permite estabelecer

condições de contorno para as eventuais soluções analíticas ou numéricas desta equação.

O método de perturbação homotópica leva a soluções precisas e o um acoplamento do método de perturbação tradicional e a homotopia estudada na topologia, conforme resumo descritivo no quadro 4.

Quadro 4 Itinerário metodológico

Etapa	Procedimentos
Etapa 1 ^a	Compreende análise, tratamento e estudado dos dados coletados pelo satélite, em conjunto com as aplicações iniciais apresentadas em publicações iniciais em anais de congresso e apresentação de resumos expandidos.
Etapa 2 ^a	Estudo das relações entre os dados coletados e os conteúdos relativos à entropia de Boltzmann e Gibbs versus a entropia tsalliana; Aplicação de tais estudos na discussão e aplicação contextual em Estatística, com apresentação de trabalhos e discussão dos resultados.
Etapa 3 ^a	Categorização das estrelas em cinco tipos distintos e efetuamos os estudos da entropia, além do estudo do processo difusivo nas XRBS; Efetuamos a comparação entre a entropia e o índice entrópico, entre o índice entrópico e a difusão, entre outros. Alguns resultados são obtidos de tal modo que surpreendem pela factibilidade. Tais resultados específicos estão sendo estudados e algumas interpretações sendo discutidas em apresentações científicas.
Etapa 4 ^a	Compreende o ajuste dos coeficientes da EFP adotada para cada estrela.
Etapa 5 ^a	Montagem de cada EFP para cada estrela com os devidos comentários e justificativas; Com os coeficientes adotados tem-se a descrição dos resultados obtidos pelas curvas de luz apresentadas nas emissões de raios-X.
Etapa 6 ^a	Dedução da EFP, agora tida como não linear, segundo argumentos encontrados na literatura em consonância com a fenomenologia observada e estudada.
Etapa 7 ^a	Aplicação do método da decomposição de Adomian e uso dos polinômios de Adomian para a convergência do processo de solução.
Etapa 8 ^a	Comparação dos resultados obtidos com os dados reais.

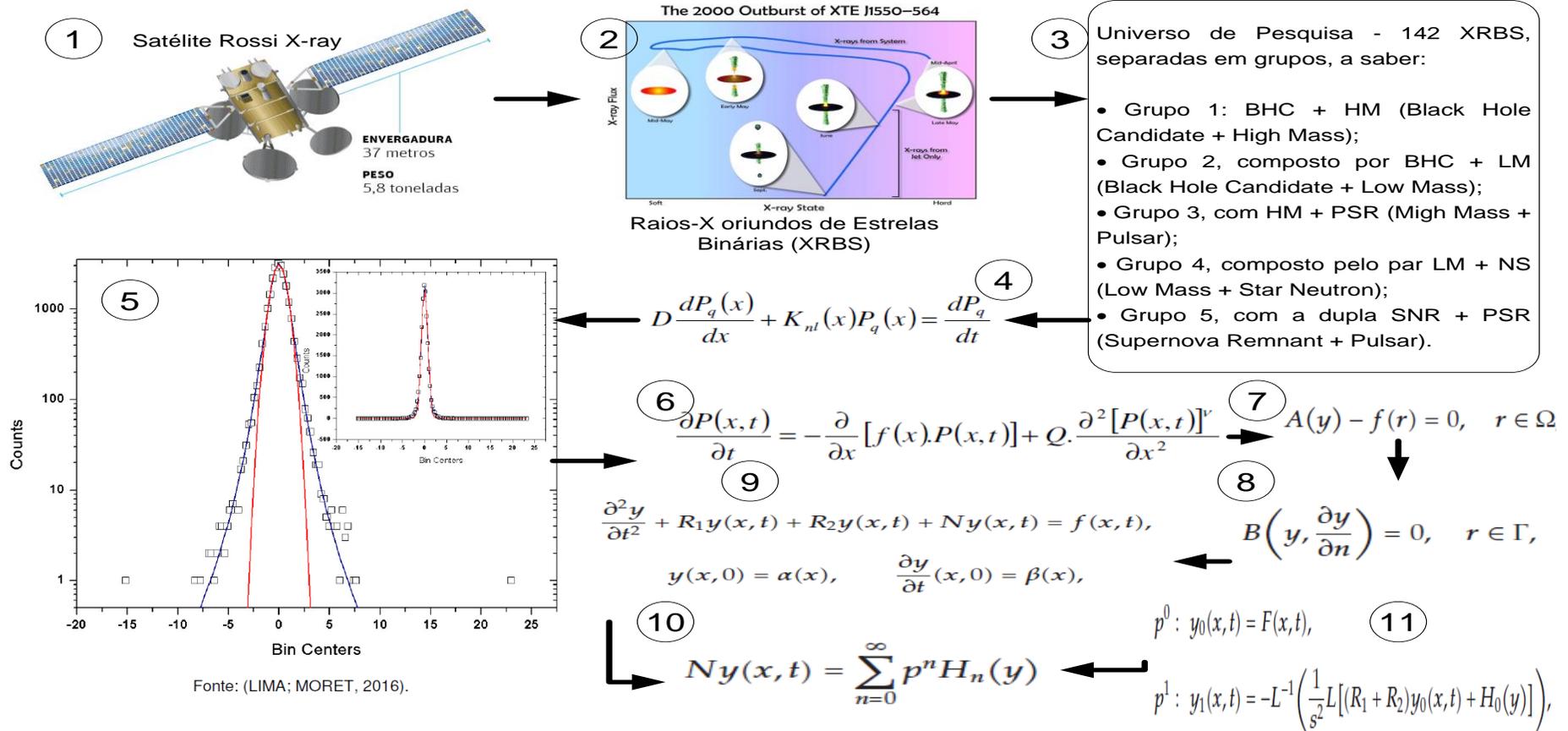
Fonte: (Autora, 2018).

A Figura 10, a seguir, mostra todo o processo do itinerário metodológico adotado na pesquisa:

Figura 10 Itinerário metodológico

MODELAGEM DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE FOKKER-PLANCK PARA ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DE RAIOS-X ORIUNDAS DE SISTEMAS BINÁRIOS UTILIZANDO OS MÉTODOS HE-LAPLACE

ITINERÁRIO METODOLÓGICO



Fonte: (Elaboração da própria autora, 2021).

3.5 O método da decomposição de Adomian (ADM)

3.5.1 Aplicações e algoritmo de modelagem

O método de decomposição de Adomian tem sido aplicado para resolver e obter soluções formais e aproximadas para uma ampla classe de problemas, decorrentes de Física, Química, Biologia ou Engenharia, inclusive para problemas lineares e não-lineares, pois permite obter uma solução analítica exata. Quando isso não for possível a solução exata, obtém-se uma solução aproximada com convergência muito rápida para a solução real, sem a necessidade de recorrer aos processos clássicos da teoria de discretização, linearização ou perturbação (ADOMIAN, 1964; ADOMIAN, 1967; ADOMIAN, 1978; ADOMIAN, 1979; ADOMIAN, 1983; ADOMIAN, 1984a; ADOMIAN, 1984b; ADOMIAN, 1984c; ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1987; ADOMIAN, 1988a; ADOMIAN, 1988b; ADOMIAN, 1988c).

Por uma questão de generalidade, descreve-se o método aplicado a uma equação diferencial não-linear do tipo:

$$FP(x,t) = 0 \quad (56)$$

onde F representa um operador diferencial não linear que é decomposto na sua parte linear e não linear e L um operador facilmente inversível de forma que:

$$F = L + R + N \quad (57)$$

onde L é um operador facilmente inversível e R é a parte restante e N é o termo não linear de forma que:

$$[L + R + N]P(x,t) = LP(x,t) + RP(x,t) + NP(x,t) = 0 \quad (58)$$

Onde o operador L é facilmente inversível de maneira que:

$$L^{-1}LP(x, t) = -L^{-1}RP(x, t) - L^{-1}NP(x, t) \quad (59)$$

3.5.2 A série de Taylor generalizada e os polinômios de Adomian

Sendo L o operador derivada da ordem n, e L⁻¹ o seu inverso, ou seja, o operador de integração. Desta maneira pode-se escrever:

$$P(x, t) - P(x_0, t_0) = -L^{-1}RP(x, t) - L^{-1}NP(x, t) \quad (60)$$

Assim:

$$P(x, t) = P(x_0, t_0) - L^{-1}RP(x, t) - L^{-1}NP(x, t) \quad (61)$$

E o restante dos termos, será ainda resolvido por um método recursivo, e, para tal vale a consideração de que pode-se decompor o termo não linear em uma série particular de polinômios do tipo:

$$NP(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (62)$$

que são denominados de polinômios de Adomian. Cada polinômio A_n depende apenas das variáveis independentes em u₀, u₁, ..., u_n. (ADOMIAN, 1994), onde a forma de gerar os polinômios de Adomian é uma generalização da série de Taylor, conforme sugere o próprio Adomian (1994) e Adomian (1997), em uma vizinhança da função u₀ ao revés da expansão na vizinhança de um ponto, como a expansão em série de Taylor tradicional procede. Assim:

$$NP(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^n \right) N^{(n)}(P(x_0, t_0)) \right] \quad (63)$$

Ou seja,

$$NP(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^n \right) N^{(n)}(P(x_0, t_0)) \right] \quad (64)$$

$$NP(x, t) = \left(\frac{1}{0!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^0 \right) N^{(0)}(P(x_0, t_0)) + \left(\frac{1}{1!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^1 \right) N^{(1)}(P(x_0, t_0)) +$$

$$\left(\frac{1}{2!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^2 \right) N^{(2)}(P(x_0, t_0)) + \left(\frac{1}{3!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^3 \right) N^{(3)}(P(x_0, t_0)) + \dots \quad (65)$$

$$\left(\frac{1}{4!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^4 \right) N^{(4)}(P(x_0, t_0)) + \dots + \left(\frac{1}{n!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^n \right) N^{(n)}(P(x_0, t_0))$$

Que implica em

$$NP(x, t) = \left(\frac{1}{0!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^0 \right) N^{(0)}(P(x_0, t_0)) + \left(\frac{1}{1!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^1 \right) N^{(1)}(P(x_0, t_0)) +$$

$$\left(\frac{1}{2!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^2 \right) N^{(2)}(P(x_0, t_0)) + \left(\frac{1}{3!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^3 \right) N^{(3)}(P(x_0, t_0)) + \dots \quad (66)$$

$$\left(\frac{1}{4!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^4 \right) N^{(4)}(P(x_0, t_0)) + \dots + \left(\frac{1}{n!} (P(x, t) - P(x_0, t_0))^n \right) N^{(n)}(P(x_0, t_0))$$

Pode-se também considerar que

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (67)$$

De modo que

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = L^{-1} g - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} P_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (68)$$

Usando-se as igualdades anteriores tem-se:

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n = L^{-1}g - L^{-1}R[P_0 + P_1 + \dots + P_n] - L^{-1}[A_0 + A_1 + \dots + A_n] \quad (69)$$

Os termos de mesma ordem nos permitem afirmar que:

$$P_0 = L^{-1}g \quad (70)$$

$$P_1 = -L^{-1}RP_0 - L^{-1}A_0 \quad (71)$$

$$P_2 = -L^{-1}RP_1 - L^{-1}A_1 \quad (72)$$

$$P_3 = -L^{-1}RP_2 - L^{-1}A_2 \quad (73)$$

$$P_4 = -L^{-1}RP_3 - L^{-1}A_3 \quad (74)$$

... ..

$$P_{n+1} = -L^{-1}RP_n - L^{-1}A_n \quad (75)$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_0 = L^{-1}g \quad (76)$$

$$P_1 = -L^{-1}RP_0 - L^{-1}A_0 = -L^{-1}R[L^{-1}g] - L^{-1}\left[\left[\frac{1}{0!}(P - P_0)^0\right]N^{(0)}(P_0)\right] \quad (77)$$

$$P_2 = -L^{-1}RP_1 - L^{-1}A_1 = -L^{-1}RP_1 - L^{-1}\left[\left[\frac{1}{1!}(P - P_0)^1\right]N^{(1)}(P_0)\right] \quad (78)$$

$$P_3 = -L^{-1}RP_2 - L^{-1}A_2 = -L^{-1}RP_2 - L^{-1}\left[\left[\frac{1}{2!}(P - P_0)^2\right]N^{(2)}(P_0)\right] \quad (79)$$

$$P_4 = -L^{-1}RP_3 - L^{-1}A_3 = -L^{-1}RP_3 - L^{-1}\left[\left[\frac{1}{3!}(P - P_0)^3\right]N^{(3)}(P_0)\right] \quad (80)$$

... ..

$$P_{n+1} = -L^{-1}RP_n - L^{-1}A_n = -L^{-1}RP_n - L^{-1}\left[\left[\frac{1}{n!}(P - P_0)^n\right]N^{(n)}(P_0)\right] \quad (81)$$

Os polinômios de Adomian foram formalmente introduzidos pelo mesmo da conforme a equação 82 (ADOMIAN, 1984a; ADOMIAN, 1986; ADOMIAN, 1994;

ADOMIAN, 1994b; ABBAOUI; CHERRUAULT, 1990; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT; ADOMIAN, 1993; ABBAOUI; CHERRUAULT; SENG, 1995):

$$A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad (82)$$

Esta fórmula é alcançada introduzindo, por conveniência, o parâmetro λ , e escrevendo

$$A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} . \quad (83)$$

Da equação anterior é possível deduzir diversos métodos práticos para o cálculo dos polinômios de Adomian ou até mesmo proceder à expansão da série de Taylor generalizada, com o respectivo operador associado no problema a ser modelado, entretanto, em qualquer das técnicas os polinômios convergem muito rapidamente (CHERRUAULT; ADOMIAN, 1993) e (ABBAOUI; CHERRUAULT; SENG, 1995).

3.6 Aplicando o método de Adomian na EFP

3.6.1 Modelagem e identificação dos operadores

Com a exposição do método de Adomian e a geração dos seus polinômios é possível modelar a EFP apresentada na Eq. (45), isto é:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x)P(x,t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \quad (84)$$

Esta pode também ser escrita como sendo

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(x)P(x,t)] - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (85)$$

É possível escrever a mesma na seguinte forma da equação 86, onde F representa um operador diferencial não linear que é decomposto na sua parte linear e não linear. L é um operador facilmente inversível, R é a parte restante e N é o termo não linear (ADOMIAN, 1964; ADOMIAN, 1967; ADOMIAN, 1978; ADOMIAN, 1979; ADOMIAN, 1983; ADOMIAN, 1984a; ADOMIAN, 1984b; ADOMIAN, 1984c; ADOMIAN, 1985).

$$[L + R + N]P(x,t) = LP(x,t) + RP(x,t) + NP(x,t) = 0 \quad (86)$$

Neste estudo, temos

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad (87)$$

$$L^{-1} \equiv \int_{t_0}^t dt \quad (88)$$

$$t_0 \equiv 0 \quad (89)$$

$$R \equiv 0 \quad (90)$$

$$N \equiv \frac{\partial}{\partial x} [f(x)] - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [A(x,t)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x,t)] = L_{FP} \quad (91)$$

$$g \equiv 0 \quad (92)$$

Assim:

$$LP(x,t) + NP(x,t) = 0 = LP(x,t) + L_{FP}P(x,t) \quad (93)$$

Que pode ser representada na equação 94.

$$L^{-1}LP(x,t) + L^{-1}L_{FP}P(x,t) = L^{-1}0 = 0 \quad (94)$$

Ou seja:

$$P(x,t) = P(x,0) - L^{-1}L_{FP} P(x,t) \quad (95)$$

Que pode ser escrito no formato:

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n = P(x,0) - L^{-1}[A_0 + A_1 + \dots + A_n] \quad (96)$$

Assim:

$$P(x,t) = P_0 + P_1 + \dots + P_n = P(x,0) - L^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} (P(x,t) - P(x,0))^n \right] N^{(n)}(P(x,0)) \right] \quad (97)$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(x,t) = P_0 + P_1 + \dots + P_n = P(x,0) - L^{-1} & \left[\left[\frac{1}{0!} (P(x,t) - P(x,0))^0 \right] L_{FP}^{(0)}(P(x,0)) \right] - \\ L^{-1} & \left[\left[\frac{1}{1!} (P(x,t) - P(x,0))^1 \right] L_{FP}^{(1)}(P(x,0)) \right] - L^{-1} & \left[\left[\frac{1}{2!} (P(x,t) - P(x,0))^2 \right] L_{FP}^{(2)}(P(x,0)) \right] - \\ L^{-1} & \left[\left[\frac{1}{3!} (P(x,t) - P(x,0))^3 \right] L_{FP}^{(3)}(P(x,0)) \right] - \dots - L^{-1} & \left[\left[\frac{1}{n!} (P(x,t) - P(x,0))^n \right] L_{FP}^{(n)}(P(x,0)) \right] \end{aligned} \quad (98)$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_0 = P(x,0) \quad (99)$$

$$P_1 = -L^{-1}A_0 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{0!} (P(x,t) - P(x,0))^0 \right] L_{FP}^{(0)}(P(x,0)) \right] \quad (100)$$

$$P_2 = -L^{-1}A_1 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{1!} (P(x,t) - P(x,0))^1 \right] L_{FP}^{(1)}(P(x,0)) \right] \quad (101)$$

$$P_3 = -L^{-1}A_2 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{2!} (P(x,t) - P(x,0))^2 \right] L_{FP}^{(2)}(P(x,0)) \right] \quad (102)$$

$$P_4 = -L^{-1} A_3 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{3!} (P(x,t) - P(x,0))^3 \right] L_{FP}^{(3)} (P(x,0)) \right] \quad (103)$$

... ..

$$P_{n+1} = -L^{-1} A_n = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{n!} (P(x,t) - P(x,0))^n \right] L_{FP}^{(n)} (P(x,0)) \right] \quad (104)$$

Onde:

$$N^{(0)} = L_{FP}^{(0)} = 1 \quad (105)$$

$$N^{(1)} = L_{FP}^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (106)$$

$$N^{(2)} = L_{FP}^{(2)} = \left(-\frac{\partial}{\partial x} [f(x)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} [f(x)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = L_{FP} L_{FP}^{(1)} \quad (107)$$

$$N^{(3)} = NN^{(2)} = L_{FP} L_{FP}^{(2)} \quad (108)$$

...

$$N^{(n)} = NN^{(n-1)} = L_{FP} L_{FP}^{(n-1)} \quad (109)$$

O que nos leva a:

$$P_0 = P(x,0) \quad (110)$$

$$P_1 = -L^{-1} A_0 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{0!} (P(x,t) - P(x,0))^0 \right] L_{FP}^{(0)} (P(x,0)) \right] = -L^{-1} L_{FP} P_0 \quad (111)$$

$$P_2 = -L^{-1} A_1 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{1!} (P(x,t) - P(x,0))^1 \right] L_{FP}^{(1)} (P(x,0)) \right] = -L^{-1} L_{FP} P_1 \quad (112)$$

$$P_3 = -L^{-1} A_2 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{2!} (P(x,t) - P(x,0))^2 \right] L_{FP}^{(2)} (P(x,0)) \right] = -L^{-1} L_{FP} P_2 \quad (113)$$

$$P_4 = -L^{-1} A_3 = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{3!} (P(x,t) - P(x,0))^3 \right] L_{FP}^{(3)} (P(x,0)) \right] = -L^{-1} L_{FP} P_3 \quad (114)$$

... ..

$$P_{n+1} = -L^{-1} A_n = -L^{-1} \left[\left[\frac{1}{n!} (P(x,t) - P(x,0))^n \right] L_{FP}^{(n)} (P(x,0)) \right] = -L^{-1} L_{FP} P_n \quad (115)$$

e, de forma simplificada

$$P_0 = P(x,0) \quad (116)$$

$$P_1 = -L^{-1}L_{FP} P_0 \quad (117)$$

$$P_2 = -L^{-1}L_{FP} P_1 \quad (118)$$

$$P_3 = -L^{-1}L_{FP} P_2 \quad (119)$$

$$P_4 = -L^{-1}L_{FP} P_3 \quad (120)$$

... ..

$$P_{n+1} = -L^{-1}L_{FP} P_n \quad (121)$$

Que é uma forma recursiva e imediata de cálculo (ADOMIAN, 1986; ADOMIAN, 1987; ADOMIAN, 1988a; ADOMIAN, 1988b; ADOMIAN, 1988c; ADOMIAN, 1994a; ADOMIAN, 1994b) dos termos da solução geral dada por

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n \quad (122)$$

3.6.2 O cálculo genérico dos polinômios de Adomian

Antes de calcular os polinômios de Adomian para o caso em questão deve-se registrar as diversas formas de operação com o operador não linear da equação, N ou M, que nos fornece:

$$N(P_0) = P_0^\varphi \quad (123)$$

$$N^{(1)}(P_0) = \varphi P_0^{\varphi-1} \quad (124)$$

$$N^{(2)}(P_0) = \varphi(\varphi-1)P_0^{\varphi-2} \quad (125)$$

$$N^{(3)}(P_0) = \varphi(\varphi-1)(\varphi-2)P_0^{\varphi-3} \quad (126)$$

$$N^{(4)}(P_0) = \varphi(\varphi-1)(\varphi-2)(\varphi-3)P_0^{\varphi-4} \quad (127)$$

$$N^{(5)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)P_0^{\varphi-5} \quad (128)$$

$$N^{(6)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)(\varphi - 5)P_0^{\varphi-6} \quad (129)$$

$$N^{(7)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)(\varphi - 5)(\varphi - 6)P_0^{\varphi-7} \quad (130)$$

$$N^{(8)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)(\varphi - 5)(\varphi - 6)(\varphi - 7)P_0^{\varphi-8} \quad (131)$$

$$N^{(9)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)(\varphi - 5)(\varphi - 6)(\varphi - 7)(\varphi - 8)P_0^{\varphi-9} \quad (132)$$

$$N^{(10)}(P_0) = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)(\varphi - 3)(\varphi - 4)(\varphi - 5)(\varphi - 6)(\varphi - 7)(\varphi - 8)(\varphi - 9)P_0^{\varphi-10} \quad (133)$$

...

Os cálculos dos polinômios de Adomian são feitos considerando que a regra de geração com os $c(v, n)$ são produtos ou soma dos produtos de v componentes de y (ADOMIAN, 1964; ADOMIAN, 1967; ADOMIAN, 1978; ADOMIAN, 1979; ADOMIAN, 1983; ADOMIAN, 1984a; ADOMIAN, 1984b; ADOMIAN, 1984c; ADOMIAN, 1985).

3.6.3 As regras de geração dos polonômios de Adomian

A soma de subscritos de n , dividido pelo fatorial dos números de subscritos repetidos, fica dessa forma:

$$A_0 = N(P_0) \quad (134)$$

Que é dado por:

$$A_0 = N(P_0) = P_0^\varphi \quad (135)$$

Para o cálculo do termo seguinte, A_1 , pode-se escrever:

$$A_1 = \sum_{v=1}^1 C(v, n) N^{(v)}(P_0) \quad (136)$$

Que pode ser escrito como sendo:

$$A_1 = \sum_{v=1}^1 C(1, 1) N_{(P_0)}^{(1)} = P_1 N^{(1)}(P_0) \quad (137)$$

Ou ainda:

$$A_1 = P_1 N^{(1)}(P_0) = P_1 \varphi P_0^{\varphi-1} \quad (138)$$

E escrevendo diretamente o operador em questão tem-se que:

$$A_1 = P_1 \varphi P_0^{\varphi-1} \quad (139)$$

Para o cálculo do termo seguinte, A_2 , pode-se escrever:

$$A_2 = \sum_{v=1}^2 C(v, 2) N^{(v)}(P_0) \quad (140)$$

Que pode ser escrito como sendo:

$$A_2 = C(1, 2) N^{(1)}(P_0) + C(2, 2) N^{(2)}(P_0) \quad (141)$$

Ou ainda:

$$A_2 = P_2 N^{(1)}(P_0) + \frac{1}{2!} P_1^2 N^{(2)}(P_0) \quad (142)$$

E escrevendo diretamente o operador em questão tem-se que:

$$A_2 = P_2 \varphi P_0^{\varphi-1} + \frac{1}{2!} P_1^2 \varphi (\varphi - 1) P_0^{\varphi-2} \quad (143)$$

Para o cálculo do termo seguinte, A_3 , pode-se escrever:

$$A_3 = \sum_{v=1}^3 C(v,3) N^{(v)}(P_0) \quad (144)$$

Que pode ser escrito como sendo:

$$A_3 = C(1,3) N^{(1)}(P_0) + C(2,3) N^{(2)}(P_0) + C(3,3) N^{(3)}(P_0) \quad (145)$$

Ou ainda:

$$A_3 = P_3 N^{(1)}(P_0) + P_1 P_2 N^{(2)}(P_0) + \frac{1}{3!} P_1^3 N^{(3)}(P_0) \quad (146)$$

E escrevendo diretamente o operador em questão tem-se que:

$$A_3 = P_3 \varphi P_0^{\varphi-1} + P_1 P_2 \varphi (\varphi - 1) P_0^{\varphi-2} + \frac{1}{3!} P_1^3 \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) P_0^{\varphi-3} \quad (147)$$

Para o cálculo do termo seguinte, A_4 , pode-se escrever:

$$A_4 = \sum_{v=1}^4 C(v,4) N^{(v)}(P_0) \quad (148)$$

Que pode ser escrito como sendo:

$$A_4 = C(1,4) N^{(1)}(P_0) + C(2,4) N^{(2)}(P_0) + C(3,4) N^{(3)}(P_0) + C(4,4) N^{(4)}(P_0) \quad (149)$$

Ou ainda:

$$A_4 = P_4 N^{(1)}(P_0) + \left(\frac{1}{2!} P_2^2 + P_1 P_3 \right) N^{(2)}(P_0) + \frac{1}{2!} P_1^2 P_2 N^{(3)}(P_0) + \frac{1}{4!} P_1^4 N^{(4)}(P_0) \quad (150)$$

E escrevendo diretamente o operador em questão tem-se que:

$$A_4 = P_4 P_0^\varphi + \left(\frac{1}{2!} P_2^2 + P_1 P_3 \right) \varphi P_0^{\varphi-1} + \frac{1}{2!} P_1^2 P_2 \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) P_0^{\varphi-3} + \frac{1}{4!} P_1^4 \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) (\varphi - 3) P_0^{\varphi-4} \quad (151)$$

Para o cálculo do termo seguinte, A_5 , pode-se escrever:

$$A_5 = \sum_{v=1}^5 C(v,5) N^{(v)}(P_0) \quad (152)$$

Que pode ser escrito como sendo:

$$A_5 = C(1,5) N^{(1)}(P_0) + C(2,5) N^{(2)}(P_0) + C(3,5) N^{(3)}(P_0) + C(4,5) N^{(4)}(P_0) + C(5,5) N^{(5)}(P_0) \quad (153)$$

Ou ainda:

$$A_5 = P_5 N^{(1)}(P_0) + (P_2 P_3 + P_1 P_4) N^{(2)}(P_0) + \left[\frac{1}{2!} P_1 P_2^2 + \frac{1}{2!} P_1^2 P_3 \right] N^{(3)}(P_0) + \frac{1}{3!} P_1^3 P_2 N^{(4)}(P_0) + \frac{1}{5!} P_1^5 N^{(5)}(P_0) \quad (154)$$

E escrevendo diretamente o operador em questão tem-se que:

$$A_5 = P_5 \varphi P_0^{\varphi-1} + (y_2 y_3 + y_1 y_4) \varphi (\varphi - 1) P_0^{\varphi-2} + \left[\frac{1}{2!} P_1 P_2^2 + \frac{1}{2!} P_1^2 P_3 \right] \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) P_0^{\varphi-3} + \frac{1}{3!} P_1^3 P_2 \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) (\varphi - 3) P_0^{\varphi-4} + \frac{1}{5!} P_1^5 \varphi (\varphi - 1) (\varphi - 2) (\varphi - 3) (\varphi - 4) P_0^{\varphi-5} \quad (155)$$

Seguindo as regras de formação da fórmula de recorrência da Eq. (83), é possível gerar, de forma indefinida, os polinômios de Adomian com as regras de geração dos termos $c(v, n)$, entretanto os mesmos convergem rapidamente para a solução exata procurada (ADOMIAN, 1964; ADOMIAN, 1967; ADOMIAN, 1978; ADOMIAN, 1979; ADOMIAN, 1983; ADOMIAN, 1984a; ADOMIAN, 1984b; ADOMIAN, 1984c; ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1986; ADOMIAN, 1987; ADOMIAN, 1988a; ADOMIAN, 1988b; ADOMIAN, 1988c; ADOMIAN, 1994a; ADOMIAN, 1994b).

4 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK COM O MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

Este capítulo apresenta as hipóteses básicas dos casos considerados fisicamente para a simulação dos processos de difusão de raios-X. Seguido a isso temos as respectivas considerações iniciais da equação de Fokker-Planck acompanhadas da descrição dos comportamentos hipotetizados para os termos restaurador e difusivo, e as respectivas soluções com o uso do método de Adomian.

4.1 Considerações iniciais ao uso da EFP em sistemas estelares

A equação de Fokker-Planck, sendo uma equação diferencial parcial, pode ser resolvida analiticamente somente em casos especiais, ou seja, com os seus coeficientes em presunções de bom comportamento matemático e as condições de contorno específicas e bem determinadas. Muitas aplicações têm interesse apenas na distribuição de probabilidade do estado estacionário com aplicações nas áreas diversas, tais como matemática financeira, para a modelagem da volatilidade de opções de ações, a obtenção do coeficiente de difusão e até mesmo no cálculo da densidade de probabilidade obtida das quotas de opção do mercado financeiro dentre outros (FRANK, 2005).

Ainda de acordo Frank (2005), embora formalmente equivalentes, os problemas diferentes podem ser resolvidos mais facilmente na equação de Fokker-Planck, em especial em pares binários estelares no processo difusivo de raios-X oriundo dos mesmos.

Na equação de Fokker-Planck, em formato mais didático ao que foi feito nesta pesquisa, é possível observar:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2 [B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2} \quad (156)$$

O termo A (x,t) corresponde a uma força externa que é restauradora de formação e é associada a um potencial confinante e, portanto, contrário ao processo difusivo. Isso se deve ao poço de potencial gravitacional oriundo do par binário, servindo, para impedir a referida difusão. B (x,t) é o termo difusivo que pode ter algumas características quando modelado em sistemas estelares, a exemplo do processo de distribuição estatística de raios-X (FRANK, 2005). Aqui são consideradas as condições de contorno descritas no quadro 5, como uma proposta de modelagem ao fenômeno.

Aplicações preliminares na modelagem da EFP têm permitido considerar variações com base em hipóteses astrofísicas dos termos da força externa restauradora e do termo difusivo, com hipóteses que permitam considerar diversas propostas de modelagem dentro dos cenários possíveis nas XRBS, proporcionando resultados consonantes com o comportamento apresentado na modelagem dos dados coletados experimentalmente.

É importante também considerar que devido a distância da fonte de formação dos processos difusivos analisados, bem como o longo tempo de formação, adota-se a proposta estacionária ao tempo em que os termos A (x,t), força externa restauradora, e B (x,t), termo difusivo, são considerados constantes e normalizados. Excetua-a isso a proposta da sua hipótese de crescimento linear, exponencial, gaussiano e q-gaussiano, com as condições iniciais também em diversas hipóteses, o que consubstancia argumentos para uma interação fisicamente linear entre as órbitas em baricentro com distâncias muito longas, tal com preconizado na fenomenologia entre algumas das XRBSs analisadas (GIACCONI *et al*, 1962) e (TSALLIS, 1988).

São apresentadas as propostas de modelos clássicas para a emissão, expansão e decaimento de ondas eletromagnéticas com comportamento hiperbólico dos termos de difusão e restauro (no sub-capítulo 4.2). Também é colocada a proposta clássica para a emissão, expansão e decaimento de ondas eletromagnéticas com comportamento hiperbólico dos termos de difusão e restauro

(evento markoviano) (no sub-capítulo 4.3); A condição inicial com decaimento exponencial normalizado (no sub-capítulo 4.4) e com decaimento exponencial ajustável (no sub-capítulo 4.5) também são apresentadas, além das hipóteses de EFP fracionária no tempo, efeito memória de Caputo (α), com termos restaurador linear (no sub-capítulo 4.6) e difusivo constante (no sub-capítulo 4.7). Por fim, temos hipóteses para as condições iniciais de comportamento de uma q-gaussiana (no sub-capítulo 4.8), que pode ser característica dos sistemas binários simples, ou seja, os que têm apenas duas estrelas, não obstante o desconhecimento das características das binárias, pois possuem longos períodos orbitais (de vários séculos ou milênios), sendo as características de suas órbitas e de outras variáveis pouco conhecidas ou não conhecidas com precisão (GIACCONI *et. al*, 1962), (TSALLIS, 1988) e (MORET, 2010).

Cabe citar que além das singularidades das órbitas, tem-se a ejeção de massa coronal, a emissão de gases das suas regiões atmosféricas externas, a compactação de astros pequenos próximos, as aleatoriedades na captação de matéria escura, além do acúmulo de matéria degenerada além da enorme quantidade de energia liberada pela fusão com os aumentos repentinos de brilho. Nos seus diversos espectros, somam-se a estes possíveis cenários os eventuais aumentos de zonas de órbitas estáveis nos seus entornos através de disrupções gravitacionais no disco protoplanetário (GIACCONI *et. al*, 1962).

Este último gera um aumento de velocidade de acreção dos eventuais protoastros nos seus respectivos entornos, não obstante isto ser factível, merece considerar ser algo difícil de ser detectado, pois tais protoastros são raramente encontrados. Um exemplo são as singularidades ainda não explicadas na binária anã branca-pulsar PSR B1620-26b, na subgigante-anã vermelha Gamma Cephei, na anã branca-anã vermelha NN Serpentis e tantas outras já catalogadas e outras a serem ainda descritas (TSALLIS, 1988).

Estes possíveis cenários passam a justificar as hipóteses postas do comportamento dos termos restaurador, difusivo e as condições iniciais que refletem as crenças atuais sobre processos de emissão de raios-X das XRBSs. Como as componentes das XRBSs podem estar suficientemente próximas uma da outra, podem mutuamente distorcer gravitacionalmente a atmosfera da sua companheira

ou até mesmo transferir ação gravitacional de uma estrela para outra, gerando comportamentos incomuns ou até mesmo impossíveis em uma estrela solitária, corroborando assim para a demanda do conhecimento destes termos nas EFP aqui modeladas (GIACCONI *et al*, 1962) e (TSALLIS, 1988).

O Quadro 5 apresenta algumas considerações possíveis, referentes à função dos termos restaurador, difusivo, das condições de contorno e descrição do ensemble para as equações de Focker-Planck, linear e não-linear, na modelagem do comportamento das XRBS analisadas.

Quadro 5 Ensembles considerados na análise

Termo		Condição Inicial $P_{(x,0)} = P_0$	Considerações e hipóteses para a emissão de Raios-X das XRBS (Física do Ensemble)	Sub-Capítulo
Restaurador A (x,t)	Difusivo B (x,t)			
-1	1	$P_{(x,0)} = x$	EFP com aproximação em primeira ordem na descrição do fenômeno, e com suposições em valores constantes e normalizados com termos restaurador e difusivo.	4.2
$e^t \cosh(x)$	$e^t \cosh(x)$	$P_{(x,0)} = \sinh(x)$	EFP com propostas clássicas para a emissão, expansão e decaimento de ondas eletromagnéticas com comportamento hiperbólico dos termos de difusão e restauro (evento markoviano).	4.3
1	1	$P_{(x,0)} = e^{-x}$	EFP com taxas restauradoras e difusivas unitárias e constantes (normalizada) e com condição inicial com decaimento exponencial normalizado (evento markoviano).	4.4
1	1	$P_{(x,0)} = e^{-\alpha x}$	EFP com taxas restauradoras e difusivas unitárias e constantes (normalizada) e com condição inicial com decaimento exponencial ajustável.	4.5
-x	1	$P_{(x,0)} = x$	EFP fracionária no tempo para resgate de efeito memória dos cenários iniciais, preconizados nas condições iniciais supostas, com a derivação fracionária de Caputo (α) e com termo restaurador linear normalizado e negativo e com termo difusivo constante unitário e normalizado e com hipótese para as condições iniciais de expansão linear.	4.6
-x	1	$P_{(x,0)} = [1 - (1-q)(x^2)]^{\frac{1}{1-q}}$	EFP fracionária no tempo, efeito memória com a derivação fracionária de Caputo (α), com termos restaurador linear normalizado e negativo e difusivo constante unitário e normalizado, com hipóteses para as condições iniciais de comportamento de uma q-gaussiana.	4.7
-1/x	x	$P_{(x,0)} = [1 - (1-q)(x^2)]^{\frac{1}{1-q}}$	EFP fracionária no tempo, efeito memória de Caputo (α), com termos restaurador atrativo inversamente proporcional à distância e difusivo linear, com hipóteses para as condições iniciais de comportamento de uma q-gaussiana.	4.8

Na última coluna é possível verificar, de forma resumida, cada item especificado e cujas deduções das soluções veremos em seguida. Desse modo, é possível modelar diversas perspectivas em função das considerações físicas relacionadas, conforme comentado nas discussões desta pesquisa.

4.2 Termo restaurador e difusivo constantes e termo estacionário linear

Considerando inicialmente uma força restauradora constante, negativa, e termo difusivo também constante e positivo com comportamento inicial linear nas condições iniciais, obtém-se um cenário fenomenológico simples. Este, no entanto, pode simular alguns casos de XRBSs com pouco tempo de observação, visto que este comportamento simula condições que podem ser representadas por valores constantes ao tempo, simplicando a modelagem, conforme verificado a seguir (GIACCONI *et al.* 1962).

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2 [B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2} = -L_{FP} P(x,t) \quad (157)$$

Onde

$$A(x,t) = -1 \quad (158)$$

e

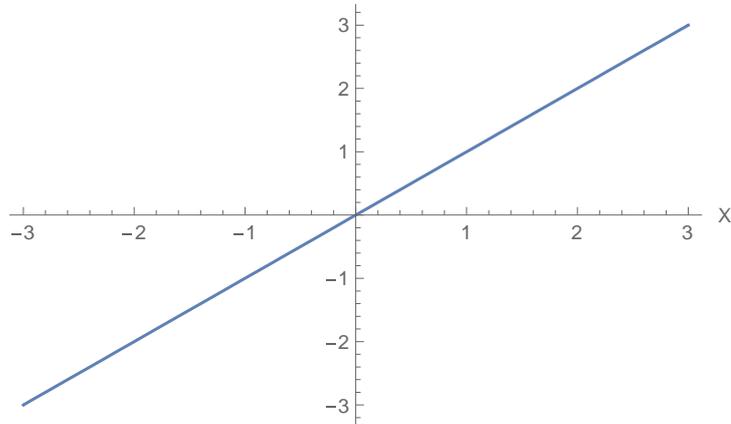
$$B(x,t) = 1 \quad (159)$$

Com

$$P(x,0) = P_0 = x \quad (160)$$

Cuja composição gráfica encontra-se no gráfico 3.

Gráfico 3 Condição inicial linear



Assim:

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} A(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (161)$$

Sendo

$$L_i \{P(x, t)\} = -L_{FP} \{P(x, t)\} \quad (162)$$

E aplicando a operação inversa no operador temporal, obtemos

$$L_i^{-1} \{L_i \{P(x, t)\}\} = -L_i^{-1} \{L_{FP} \{P(x, t)\}\} \quad (163)$$

Isto é,

$$P(x, t) = P(x, 0) - L_i^{-1} \{L_{FP} \{P(x, t)\}\} \quad (164)$$

Que é uma forma recursiva e imediata de cálculo dos termos da solução geral dada por

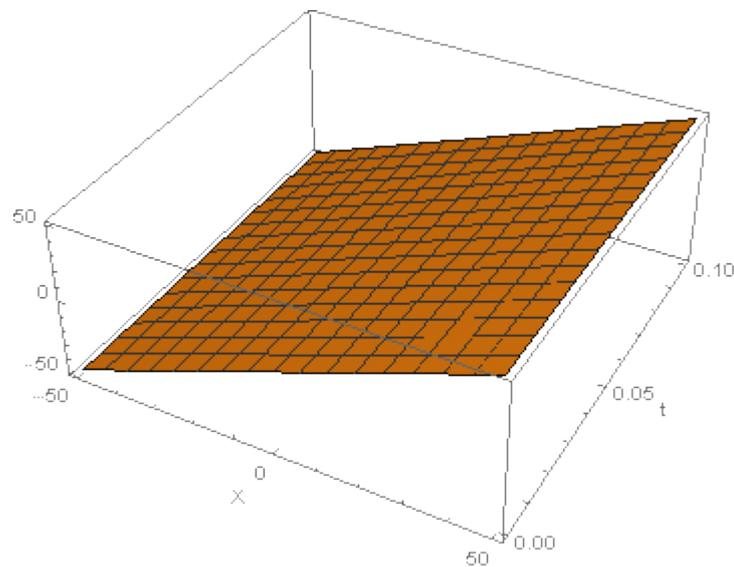
$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n = x - t + 0 + 0 + \dots + 0 = x + t \quad (165)$$

cuja solução é

$$P(x, t) = x + t \quad (166)$$

Representada no gráfico 4, a seguir:

Gráfico 4 Solução exata da EFP com termos restaurador e difusivos constantes



Esta é a solução proposta pelo método de Adomian, como comprovação do método para a proposição de soluções exatas (FRANK, 2005; ADOMIAN, 1994a; ADOMIAN, 1987; ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1986; ROSSI, 2018).

4.3 EFP com propostas hiperbólicas para a emissão, expansão e decaimento

Ainda na proposta de modelagens com hipóteses simplificadas, é possível considerar uma força restauradora e a difusiva com comportamento exponencial crescente, moldado por termos hiperbólicos, isto é,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2[B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2} = -L_{FP}P(x,t) \quad (167)$$

Com termo restaurador:

$$A(x,t) = e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x) \quad (168)$$

e:

$$B(x,t) = e^t \cosh(x) \quad (169)$$

Cuja condição de contorno poderia ser:

$$P(x,0) = P_0 = \sinh(x) \quad (170)$$

O que possibilita moldar algum tipo de comportamento consonante com funções hiperbólicas. Estas modelam as atrações, decaimentos e cenários de difusão elencados, entretanto são clássicas soluções de equações diferenciais lineares nas suas diversas técnicas (GIACCONI et al., 1962; RISKEN, 1984a; ADOMIAN, 1994a).

Assim, é possível escrever:

$$L_t \{P(x,t)\} = -L_{FP} \{P(x,t)\} \quad (171)$$

Onde:

$$P_0 = P(x,0) = \sinh(x) \quad (172)$$

Assim:

$$P_{n+1} = -L^{-1}L_{FP}P_n = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \sinh(x) \quad (173)$$

Esta é uma forma recursiva e imediata de cálculo dos termos da solução geral dada por

$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \cosh(x) + t \sinh(x) + \frac{t^2}{2!} \sinh(x) + \frac{t^3}{3!} \sinh(x) + \dots + \frac{t^n}{n!} \sinh(x)$$

$$\dots + P_n = x - t + 0 + 0 + \dots + 0 = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) \sinh(x) = e^t \sinh(x) \quad (174)$$

Cuja solução fechada, é:

$$P(x, t) = e^t \sinh(x) \quad (175)$$

Esta é a solução proposta pelo método de Adomian (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009) e modela um cenário factível, tendo como função solução parte do termo hipotetizado para as condições iniciais. Isto, por si só legitima o fato de que a proposta refletida na fenomenologia dos dados e no seu ajuste para as funções iniciais, desdobra-se como parte constitutiva da solução final da própria EFP aqui associada (RISKEN, 1984).

4.4 EFP com taxas unitárias e com condição inicial com decaimento exponencial

Ainda na tentativa de modelar de acordo com hipóteses fisicamente factíveis e com soluções matematicamente analíticas, mas viáveis, é possível considerar uma força restauradora e termo difusivo constantes, com condição de contorno em decaimento exponencial:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t) P(x, t)] + \frac{\partial^2 [B(x, t) P(x, t)]}{\partial x^2} = -L_{FP} P(x, t) \quad (176)$$

Onde

$$A(x, t) = 1 \quad (177)$$

e

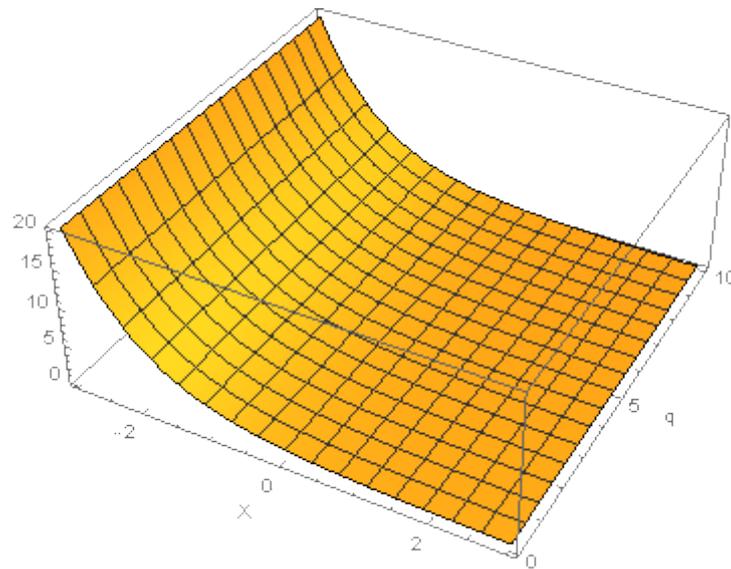
$$B(x,t) = 1 \quad (178)$$

Com

$$P(x,0) = P_0 = e^{-x} \quad (179)$$

Descrita graficamente a seguir:

Gráfico 5 Condição inicial em decaimento exponencial normalizado



Com isso, temos:

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} A(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (180)$$

É possível escrever

$$L_t \{P(x,t)\} = -L_{FP} \{P(x,t)\} \quad (181)$$

E aplicando a operação inversa no operador temporal, temos

$$L_t^{-1} \{L_t \{P(x,t)\}\} = -L_t^{-1} \{L_{FP} \{P(x,t)\}\} \quad (182)$$

que é

$$P(x,t) = P(x,0) - L_t^{-1} \{L_{FP} \{P(x,t)\}\} \quad (183)$$

Assim:

$$P_0 = P(x,0) = e^{-x} \quad (184)$$

O que nos permite escrever que

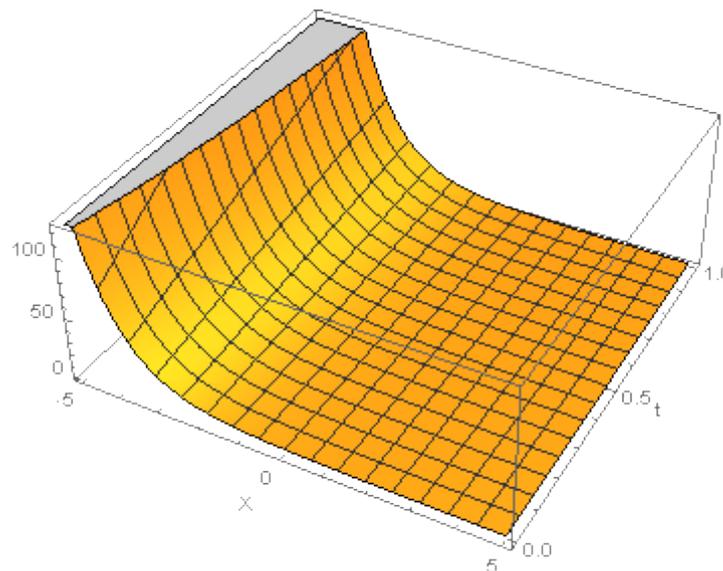
$$P_n = -L^{-1}L_{FP} P_{n-1} = 0 \quad (185)$$

Ou seja, com a seguinte solução fechada:

$$P(x,t) = (1 + 2t)e^{-x} \quad (186)$$

Registrada no gráfico 6, a seguir:

Gráfico 6 Solução da EPF com decaimento exponencial normalizado



Esta é a solução proposta pelo método de Adomian (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009), que aproxima-se mais da realidade objetiva dos ajustes exponenciais dos dados numéricos coletados no satélite, embora não se verifique a flexibilidade posta nas diversas XRBSs.

4.5 EFP com taxas unitárias e com decaimento exponencial ajustável

Ao considerar uma força restauradora e termo difusivo constantes, com condição de contorno em decaimento exponencial ajustável, repete-se a tentativa do item anterior, acreditando que o ajuste do coeficiente exponencial permitiria ajustar as curvas das diversas XRBSs. Tais ajustes não maximizam os resultados, conforme verificado na sua solução. Assim, temos:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2[B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2} = -L_{FP}P(x,t) \quad (187)$$

Sendo

$$A(x,t) = 1 \quad (188)$$

e

$$B(x,t) = 1 \quad (189)$$

com condição de contorno ajustável em parâmetro exponencial, sendo

$$P(x,0) = P_0 = e^{-ax} \quad (190)$$

Com a composição gráfica em registro com algo análogo ao gráfico 4 em função dos valores de α . Utilizando a fórmula recursiva, temos:

$$P_{n+1} = -L^{-1}RP_n - L^{-1}A_n \quad (191)$$

Sendo

$$P_0 = P(x,0) = e^{-ax} \quad (192)$$

O que nos permite escrever também

$$P(x,t) = e^{-ax} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[a^{n-1} (1+a)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right] \quad (193)$$

Esta é uma solução aberta, notoriamente convergente. Trata-se de uma solução exata, que é a solução proposta pelo método de Adomian (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009), e, conforme dito anteriormente, não modela por completo o comportamento da fenomenologia das diversas XRBSs analisadas.

4.6 EFP fracionária no tempo com a derivação fracionária de Caputo (α)

A EFP não linear com derivação fracionária no tempo pode ser deduzida da mesma maneira que a não linear não fracionária. Assim, devido a não linearidade no tempo, isto é, conforme a equação de Fokker-Planck de forma mais generalizada, com considerações que ensejam um processo difusivo anômalo, passa a ser possível incorporar outras distribuições espaço-temporais. Assim, é possível considerar uma equação de difusão não linear, descrevendo analiticamente uma classe de processo difusivos anômalos, representado pela equação (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009)

$$\frac{{}^c \partial^\alpha P(x, t)}{\partial t^\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)P(x, t)] + \frac{\partial^2 [B(x, t)P(x, t)]}{\partial x^2}; 0 < \alpha < 1 \quad (194)$$

Aqui o termo derivativo fracionário no tempo resgata o efeito memória da evolução fenomenológica, descrevendo melhor o sistema como sendo complexo, com efeitos não-locais. Sua fractalidade é a que melhor representa o cenário aqui estudado, com suas taxas de contribuição para cada parte dos fenômenos ocorridos (ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1986).

Antes da aplicação do método de Adomian na proposta de solução desta equação, cabe salientar que muitas definições de cálculo fracionário são usadas para resolver os problemas de diferencial fracionário. As mais frequentemente encontradas incluem Riemann-Liouville, Caputo, Wely e Rize (ADOMIAN, 1985;

ADOMIAN, 1986). Na aplicação aqui tratada foi adotada a proposta dos operadores em derivação e integração de Riemann-Liouville (FRANK, 2005; ADOMIAN, 1994a), cuja derivada fracionária de ordem α é definida conforme a equação abaixo:

$${}^c D^\alpha P(x, t) = \frac{d^\alpha P(x, t)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} P(x, t) dt \right]; n - 1 \leq \alpha < n \quad (195)$$

Embora esta seja a derivada fracionária de Caputo, a mesma nasce da definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville, sendo a derivada de ordem arbitrária equivalente à de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária.

O operador integral I^α , também denominado de Integral Fracionária de Riemann-Liouville é definido como sendo (FRANK, 2005; ADOMIAN, 1994a):

$$I^\alpha P(x, t) = \frac{d^{-\alpha} P(x, t)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} P(x, t) dt \quad (196)$$

Utiliza-se também as relações que envolvem a derivada fracionária modificada, a derivada de Caputo (OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM et al., 1974; GHORBANI, 2009), que é definida como sendo:

$$D_c^\alpha P(x, t) = \frac{d^\alpha P(x, t)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left[\int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} P(x, t) dt \right]; n - 1 \leq \alpha < n \quad (197)$$

Temos também a função exponencial generalizada, conhecida como função de Mittag-Leffler, que é definida por (GHORBANI, 2009):

$$E_B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x^r}{\Gamma(\beta r + 1)} \right); \beta > 0 \quad (198)$$

Dito isso, é possível escrever, usando o método de Adomian, as seguintes relações (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009):

$$D_{C,t}^{\alpha} P(x,t) = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2 [B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2} = -L_x \{A(x)P(x,t)\} + L_{xx} \{B(x)P(x,t)\} \quad (199)$$

Assim,

$$P(x,t) = P(x,0) + I^{\alpha} [-L_x \{A(x)P(x,t)\} + L_{xx} \{B(x)P(x,t)\}] \quad (200)$$

O índice α é ajustado conforme o sistema analisado. No caso das XRBS, com os coeficientes de melhor ajuste no processo difusivo, pudemos relacioná-los fenomenologicamente. Por exemplo, $\alpha=1$ corresponde a uma distribuição de probabilidades associadas aos sistemas não-extensivos, que maximizam a entropia proposta por Tsallis. A a ordem (α) inteira não registra efeitos de memória do fenômeno originário, entretanto cada XRBS deve ser melhor explicada em função da sua idade, fenômenos originários e distância da fonte, sendo isto melhor modelado para valores específicos de α diferentes da unidade.

Esta, como dito anteriormente, é uma generalização da entropia de Boltzmann- Gibbs, possibilitando uma redução do tipo de EFP clássica.

Desse modo, α é um parâmetro real que pode assumir valores em função do meio e da historicidade dos fenômenos, desde a sua formação, com os valores respectivos deste parâmetro refletindo os efeitos transientes da sua formação de maneira que o mesmo pode ser ajustado para melhor correlação com os dados numéricos que revelam o “tipo” de processo difusivo (normal ou anômalo).

Paralelo a isso, o termo restaurador $A(x,t)$ pode estar associado a uma força externa restauradora, que por sua vez, está associada a um potencial confinante tsalliano. Este é contrário ao processo difusivo, devido ao potencial confinante gravitacional oriundo das XRBSs analisadas com termo difusivo $B(x,t)$, com características que se enquadram quando modelado em sistemas estelares (RISKEN, 1984; ADOMIAN, 1994a).

Portanto, consideremos as condições

$$A(x,t) = -x \quad (201)$$

e

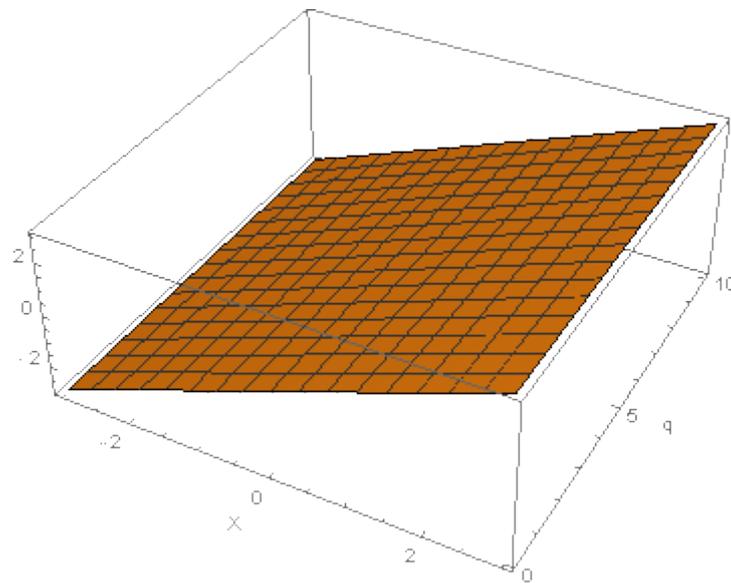
$$B(x,t) = 1 \quad (202)$$

e

$$P(x,0) = P_0 = x \quad (203)$$

Com o gráfico a seguir:

Gráfico 7 Condição inicial linear



Generalizando, temos:

$$P_n = I^\alpha [-L_x \{A(x)P_{n-1}\} + L_{xx} \{B(x)P_{n-1}\}] = \frac{2^n xt^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (204)$$

Assim, finalmente a melhor opção para a solução e a solução fechada (no limite de infinitos termos), produzirá:

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [P_n] = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n xt^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right] \quad (205)$$

Ou seja:

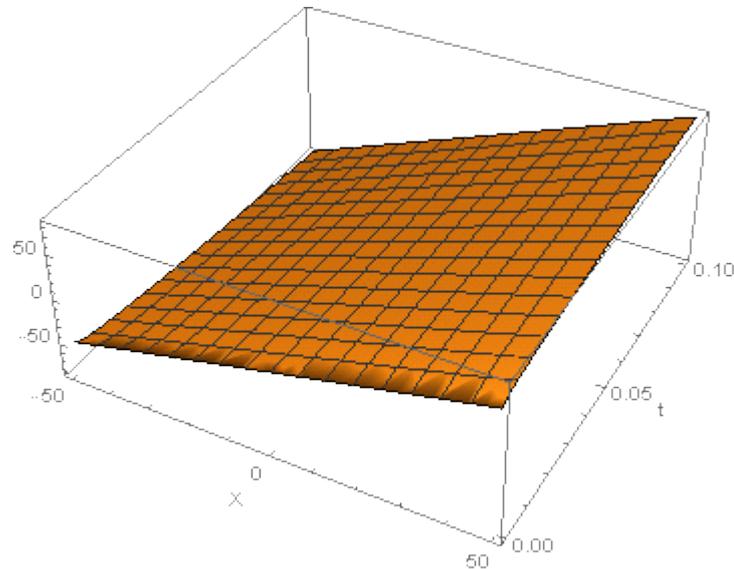
$$P(x, t) = x \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right] = x E_\alpha(2t^\alpha) \quad (206)$$

Assim:

$$P(x, t) = x E_\alpha(2t^\alpha) \quad (207)$$

E com composição gráfica em registro no gráfico 8, a seguir:

Gráfico 8 Solução da EPF fracionária de Caputo (α) com termo restaurador linear negativo e termo difusivo constante condições iniciais linear



Deve-se considerar também que a solução estacionária recai para a difusão clássica quando o índice α for inteiro e poderá ser ajustado em função dos dados experimentais de forma que cada XRBS venha a ser bem representado com o seu respectivo valor para a ordem da derivação fracionária que melhor se aplica à modelagem e que se ajuste à lei de potência que rege a difusão da respectiva XRBS. Isso define características intrínsecas de cada XRBS, permitindo generalizar a proposta de modelagem para esta categoria de objetos astronômicos.

4.7 EFP fracionária de Caputo (α) e comportamento de uma q-gaussiana.

Devido a não linearidade no tempo - ação disruptiva e com acúmulo de pesos diferenciados a cada momento de ocorrência guardando, em efeito memória, conforme a equação de Fokker-Planck de forma mais generalizada, com considerações que ensejam um processo difusivo anômalo - é possível incorporar outras distribuições espaço-temporais, sendo factível considerar uma equação de difusão não linear, descrevendo analiticamente uma classe de processo difusivos anômalos e com hipótese de comportamento tsalliano para as condições iniciais, (RISKEN, 1984; ADOMIAN, 1994a) e devidamente representado pela equação

$$\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial t^\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2 [B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2}; 0 < \alpha < 1 \quad (208)$$

O termo derivativo fracionário no tempo resgata o efeito memória da evolução fenomenológica, melhor representando o perspectiva exposta e as suas taxas de contribuição para cada parte dos fenômenos ocorridos (ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1986).

É possível escrever, usando o método de Adomian, a solução geral a seguir (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009):

$$P(x,t) = P(x,0) + I^\alpha [-L_x \{A(x)P(x,t)\} + L_{xx} \{B(x)P(x,t)\}] \quad (209)$$

O índice α é ajustado conforme o sistema analisado, apresentando uma melhor correlação das condições de contorno, visto que a hipótese do comportamento tsalliano já foi devidamente identificada nos dados reais. Assim, é possível considerar que o termo restaurador $A(x,t)$ pode estar associado a uma força externa restauradora, que por sua vez, está associada a um potencial confinante tsalliano, ou seja:

$$A(x,t) = -x \quad (210)$$

e

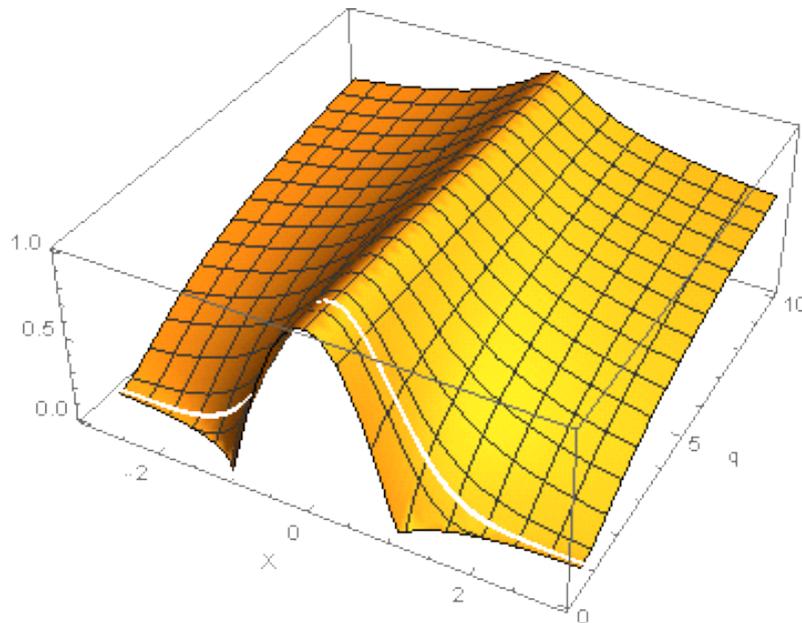
$$B(x, t) = 1 \quad (211)$$

e

$$P_{(x,0)} = [1 - (1 - q)(x^2)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (212)$$

Cuja representação gráfica encontra-se no gráfico 9:

Gráfico 9 Condição inicial de comportamento q-gaussiano

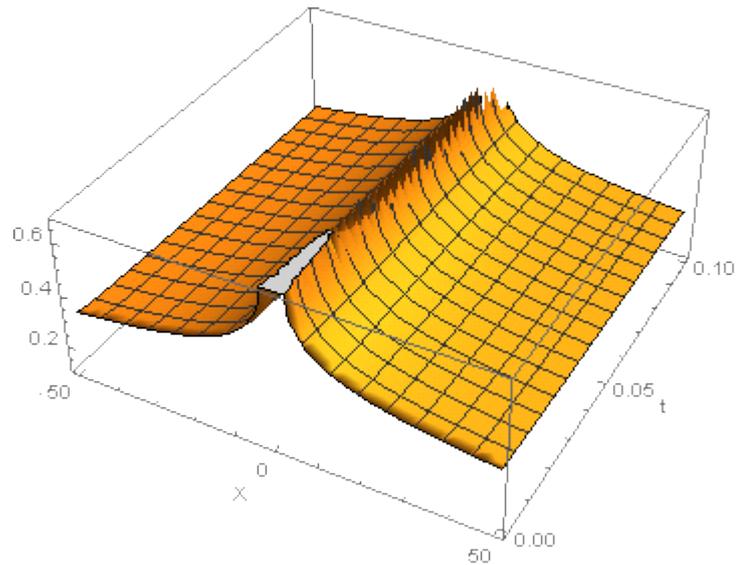


Desse modo, obtém-se uma modelagem mais completa e mais próxima da realidade fenomenológica analisada nos dados. A solução fechada do tipo:

$$P(x, t) = (1 + (-1 + q)x^2)^{\frac{1}{1-q}} E_{\alpha} \left(\frac{t^{\alpha} (1 + q + 3x - 2qx + 2x^2 - 3qx^2 + q^2 x^2)}{(-1 + (-1 + q)x^2)^2} \right) \quad (213)$$

Tem seu comportamento gráfico exposto abaixo.

Gráfico 10 Solução da EPF fracionária de Caputo (α) e com condição inicial q-gaussiana



O índice α for unitário refere-se ao caso tsalliano da q-gaussiana e para demais valores do índice α obtem-se a solução estacionária já modelada e acrescida de tempo temporal oriundo do efeito memória da origem de formação do fenômeno, que, a depender de como tenha ocorrido em cada uma XRBS, tem-se um índice customizado para a mesma.

4.8 EFP fracionária no tempo com efeito memória de Caputo (α) e condição inicial q-gaussiana

Ainda considerando a não linearidade no tempo, ou seja, a proposta de um processo difusivo anômalo com outras hipóteses associadas aos termos restaurador, difusivo e no que concerne às condições iniciais, é possível incorporar outras distribuições espaço-temporais, tal como uma equação de difusão não linear, descrevendo analiticamente uma classe de processo difusivos anômalos³. A hipótese de comportamento tsalliano composto (q-gaussiana em composição ao decaimento com o inverso do quadrado da distância para as condições iniciais) coaduna com algumas propostas atuais e com a fenomenologia que se hipotetiza nas regiões de influência das XRBSs (ABBAOUI; CHERRUAULT, 1994; CHERRUAULT, 1989; OKSENDAL, 2004; PODLUBNY, 1999; OLDHAM; SPANIER, 1974; GHORBANI, 2009).

A equação a seguir representa esta hipótese:

$$\frac{{}^c \partial^\alpha P(x,t)}{\partial t^\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x,t)P(x,t)] + \frac{\partial^2 [B(x,t)P(x,t)]}{\partial x^2}; 0 < \alpha < 1 \quad (214)$$

De forma análoga, o termo derivativo fracionário no tempo resgata o efeito memória da evolução do processo difusivo, melhor representando o cenário exposto e as suas taxas de contribuição para cada parte dos fenômenos ocorridos (ADOMIAN, 1985; ADOMIAN, 1986). Desta maneira, usando o método de Adomian, a solução geral a seguir:

$$P(x,t) = P(x,0) + I^\alpha [-L_x \{A(x)P(x,t)\} + L_{xx} \{B(x)P(x,t)\}] \quad (215)$$

Nesta proposta o termo restaurador A (x,t) pode estar associado a uma força externa restauradora que decai com o inverso da distância, consolidando uma proposta que vai além da influência gravitacional pois agrega possibilidades associadas às oscilações elétricas e magnéticas proporcionadas por jatos coronais e demais oscilações e anomalias que podem originar-se do cenário da interação estelar e que hipotetiza-se como sendo associado a um potencial confinante, ou seja:

$$A(x,t) = -1/x \quad (216)$$

E um termo difusivo de comportamento linear do tipo:

$$B(x,t) = x \quad (217)$$

e uma condição inicial conforme preconizada na estatística de Tsallis e em consonância com a fenomenologia mensurada, ou seja:

$$P_{(x,0)} = [1 + (-1 + q)(x^2)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (218)$$

E com composição gráfica em registro no gráfico 8 já apresentado

anteriormente. Tendo-se assim uma modelagem mais completa e portanto mais próxima da realidade fenomenológica analisada nos dados de forma que:

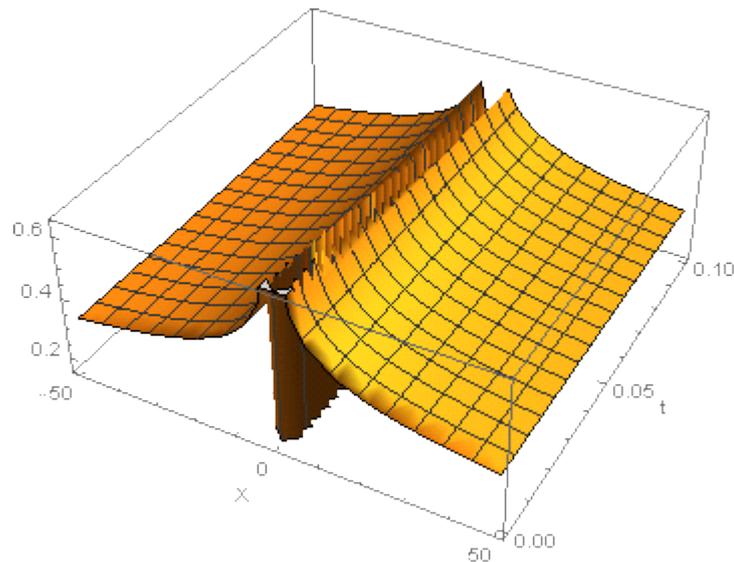
$$P(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [P_n] = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \quad (219)$$

e com solução fechada do tipo:

$$P(x, t) = \left(1 - (-1 + q)x^2\right)^{\frac{1}{1-q}} E_a \left(\frac{t^\alpha (3 + 6x^2 + (3 - 4q + q^2)x^4)}{(-1 - (-1 + q)x^2)^2} \right) \quad (220)$$

E com composição gráfica em registro no gráfico 11, a seguir:

Gráfico 11 Solução da EPF de Caputo com termo restaurado inversamente proporcional à distância, termo difusivo linear e com condição inicial q-gaussiana



Além disto o índice α pode ser ajustado em função dos dados experimentais de forma que cada XRBS venha a ser bem representado com o seu respectivo valor para a ordem da derivação fracionária que melhor se aplica à modelagem. Isso define características intrínsecas de cada XRBS, permitindo generalizar a proposta de modelagem para esta categoria de objetos astronômicos.

5 DISCUSSÃO DAS HIPÓTESES PROSPECTADAS E ASPECTOS FÍSICOS DA EJEÇÃO DE RAIOS-X EM XRBS

Neste capítulo são evidenciados os aspectos gerais dos resultados das modelagens com lastro nas hipóteses propostas, bem como análise comparativa das mesmas com o registo dos repaldos físicos positivos e negativos de cada uma e as colaborações singulares da pesquisa.

Todo este cenário analisado, desde a proposta com coeficientes e condições de iniciais mais simples, constantes lineares, até as considerações em q-gaussianas, proporcionam resultados que podem ser analisados em comparação com os dados coletados e algumas características podem ser elencadas para legitimar o modelo de difusão de raios-X proposto bem como as caracterizações da fractalidade desta difusão além de proporcionar análises de outros fenômenos físicos associados, tais como o comportamento do processo difusivo no Lóbulo de Roche, das forças eletromagnéticas atuantes nas regiões de tensão entre os coeficientes restaurador e difusivo considerados até as características singulares das q-entropias e dos índices entrópicos calculados, proporcionando assim mais legitimidade ao modelo proposto.

5.1 Justificativas para as condições iniciais q-gaussianas

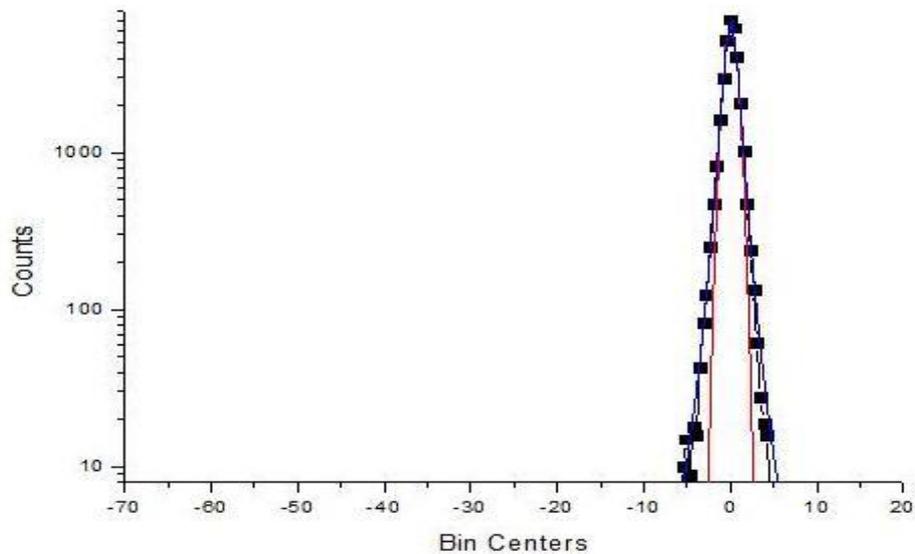
Considerando todas as categorias, foram estudadas 156 XRBS. Para cada par de estrelas foi confeccionado o histograma das intensidades e, em seguida foram ajustadas às distribuições gaussiana e q-gaussiana, ou seja, considerou-se a expressão para ajuste:

$$P_s(I) = C_0 \left[1 - C_1 (1 - q)(I - I_0)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (221)$$

Sendo c_0, c_1, I_0 e q parâmetros de ajuste, enquanto que o índice s denota que a distribuição é estacionária.

Como exemplo, temos uma binária sob uma análise gaussiana e q-gaussiana, mostrada no Gráfico 12, a seguir:

Gráfico 12 Distribuição gaussiana em comparação com a q-gaussiana



Para todas as curvas analisadas foi encontrado um valor de q maior que 1, corroborando a ideia de uma distribuição tsalliana, conduzindo a uma compreensão fenomenológica que se baseia na mecânica termoestatística de Tsallis.

Vê-se a distribuição gaussiana (em azul) em comparação com a q-gaussiana, sendo o ajuste desta última o que melhor descreve, estatisticamente o fenômeno.

A q-gaussiana em azul ajusta-se melhor, com coeficiente de Pearson $R = 0,999$, com análise de variância (ANOVA) $F > 20000$ e $Pr ob_{>F} = 0$. De forma análoga o ajuste da gaussiana e q-gaussiana aplicada à XRBS gs 1124-684, com valor de índice entrópico $q = 1,42686 \pm 0,00864$.

5.2 O Lóbulo de Roche de Potencial Gravitacional para o caso das XRBSs

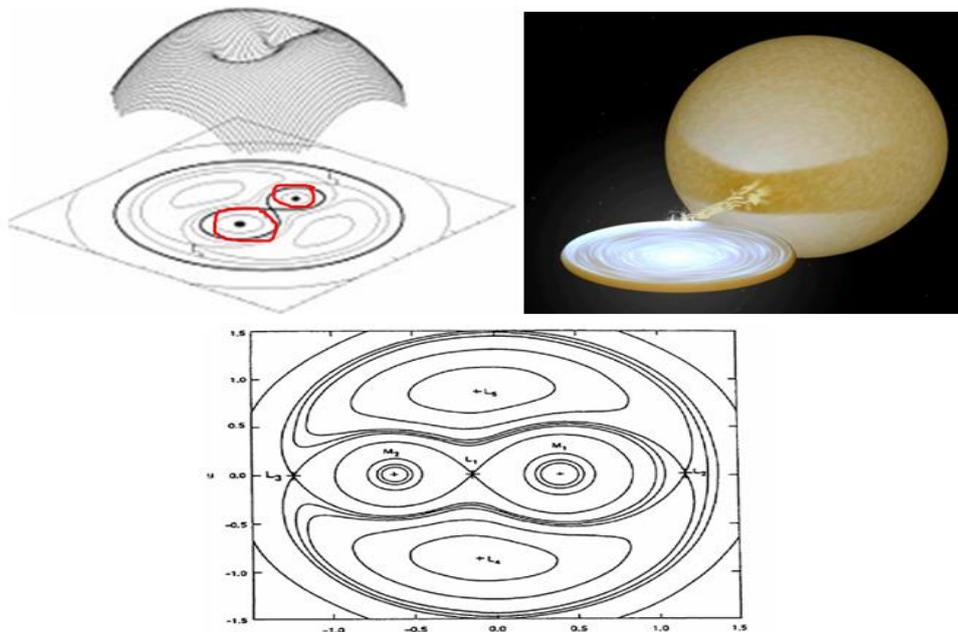
A análise no espectro de raios-X ocorre devido ao fato de que os mesmos são

emitidos apenas se as duas estrelas estiverem muito próximas uma da outra com o eventual preenchimento do lóbulo de Roche de potencial gravitacional crítico, visto tratar-se de região do espaço ao redor de uma estrela, em um sistema binário, na qual o material orbital é gravitacionalmente vinculado a essa estrela (KUTNER, 2003; FREEDMAN; KAUFMANN III, 2020).

Este cenário nos remete ao fato de que, se a expansão estelar ultrapassar o seu lóbulo de Roche indica que o material fora do lóbulo cairá na outra estrela, e vice e versa para os casos dos XRBSs, conforme verifica-se na Figura 11. Nela é possível observar o cenário físico com evidências de difusão de onda eletromagnética no espectro visível. Também pode representar comportamento análogo aos raios-X, seguida de evidências, em cor vermelha, da região de propriedade de cada estrela do par, e registros das forças restauradoras e difusivas de cada respectiva região em curva de potencial gravitacional.

A região em questão segue um modelo aproximado de uma gota, delimitada por um equipotencial gravitacional crítico, com o ápice da gota apontando para a outra estrela (e no ápice está o ponto de Lagrange L1 do sistema).

Figura 11 Lóbulo de Roche



Fonte: Adaptado de (KAUFMANN III, 2020).

A região mencionada é diferente do limite de Roche, a distância na qual um

objeto que se mantém unido somente pela gravidade começa a romper-se devido à força de maré; e, também é diferente da esfera de Hill, que se aproxima da esfera de influência gravitacional de um corpo astronômico face a perturbações de um outro corpo mais massivo, em torno da qual ele orbita.

Este cenário descrito então modela fisicamente as diversas hipotizações postas nesta pesquisa, pois esta região de influência gravitacional ainda não foi devidamente prospectada, em especial com a consideração do fato de que se a estrela se expandir além de seu lóbulo Roche, o material fora do lóbulo cairá na outra estrela, desvirtualizando-se assim a eventual difusão, e indexando a mesma a este cenário de acreação (LIMA; MORET, 2015; LIMA; MORET, 2016).

Fato é que os cenários remetem ao comportamento de turbulências e difusões singulares ou anômalas envolvendo a magnetohidrodinâmica e suas idiosincrasias, por vezes ainda não prospectadas, previstas, quiçá explicadas nos casos de interações entre as XRBSs, o que torna ainda mais poderoso o uso do método da decomposição de Adomian e seus derivativos neste processo de soluções exatas.

5.3 Forças eletromagnéticas de tensão

Além disto, as forças de tensão de um campo magnético não têm correspondência no regime hidrodinâmico usual e podendo assim adivir diversos comportamentos inusuais, o que consubstancia o uso de EFP não lineares para preconizar esta fenomenologia com eventuais ajustes dos respectivos índices entrópicos e ordem fracionária derivativa com efeitos de longo alcance, memória e demais características fractalizadas do sistema complexo em análise, completando assim a generalização do processo de análise, análogo inclusive à análise de Ornstein-Uhlenbeck, que também considera um conjunto de modelos de ruídos lineares para explicar os processos de ruídos estacionários e seus comportamentos estatísticos e suas variações no tempo (MORET, 2014; HEINTZ, 1978; BLACK HOLES, 2008).

Essas considerações, de Ornstein-Uhlenbeck, também se caracterizam por

propostas de funções de entrada como as funções de decaimento e de taxa entradas, produzindo um amplo espectro de processos estacionários e que são capazes de exibir uma rica variedade de comportamentos físicos.

Este processo comparativo, entre o que foi feito nesta pesquisa com a técnica proposta por Ornstein-Uhlenbeck, consubstancia os resultados obtidos de forma matemática, visto que análises físicas não podem ser feitas, no momento, devido às longas distâncias das XRBSs, mas os desdobramentos dos resultados são assim legitimados bem como os seus coeficientes de deriva associados (MORET, 2014; HEINTZ, 1978; BLACK HOLES, 2008).

5.4 Dispersões e projeções da q-entropia

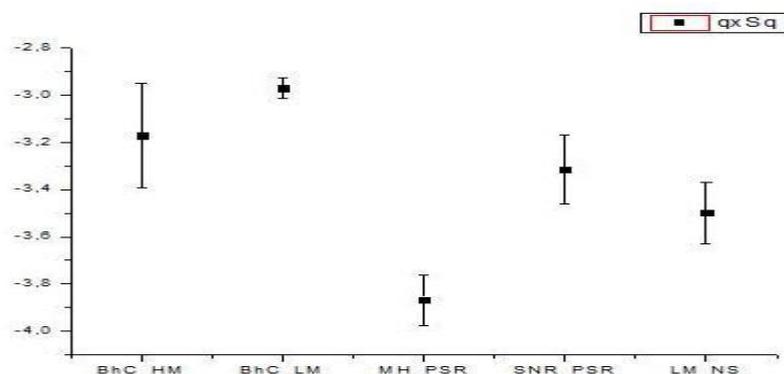
Nestas mesmas considerações pode-se calcular a provável q-entropia, que é dada por:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^w (p_i)^q}{q - 1}, (q \in \mathbb{R}) \quad (222)$$

Sendo as probabilidades p_i determinadas, estatisticamente, por meio dos histogramas. Os gráficos de dispersão, 13 e 14, mostram relações obtidas entre o índice entrópico (q) e a entropia, bem como entre a difusão.

Ambos foram obtidos a partir do ajuste linear das relações dadas.

Gráfico 13 Relação entre q x Sq



Fonte: Autora

O gráfico de dispersão 13 mostra a relação existente entre o índice entrópico e

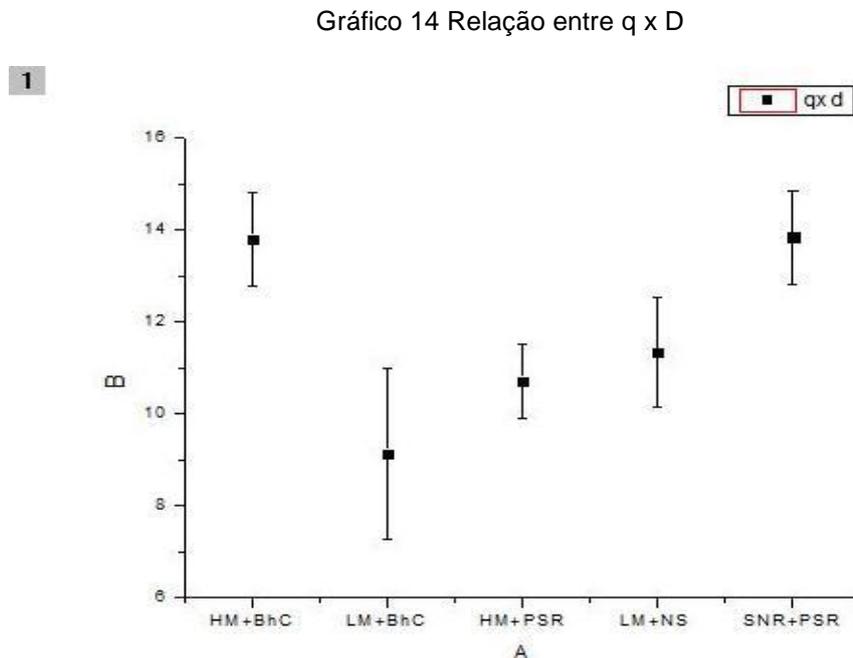
a q-entropia. Nele podemos observar que os dois grupos constituídos de pulsares com remanescentes de supernovas e os binários compostos de estrelas de alta massa com candidatas a buracos negros apresentam comportamento dispersivo similar.

Não tanto como apresentado no gráfico 13, que traz uma relação entre o índice entrópico e a difusão. No entanto, quando procuramos estabelecer relações entre o índice entrópico q e a entropia ou entre q e a difusão, estes dois grupos estelares mostram relações observadas.

Nos gráficos 14 e 15, o coeficiente de difusão para a análise apresentada é dado por:

$$D = \frac{2}{k} \left[\frac{A^{(q-1)}}{2-q} \right] \quad (223)$$

E o gráfico associado na relação qxD tem-se que:



Fonte: Autora

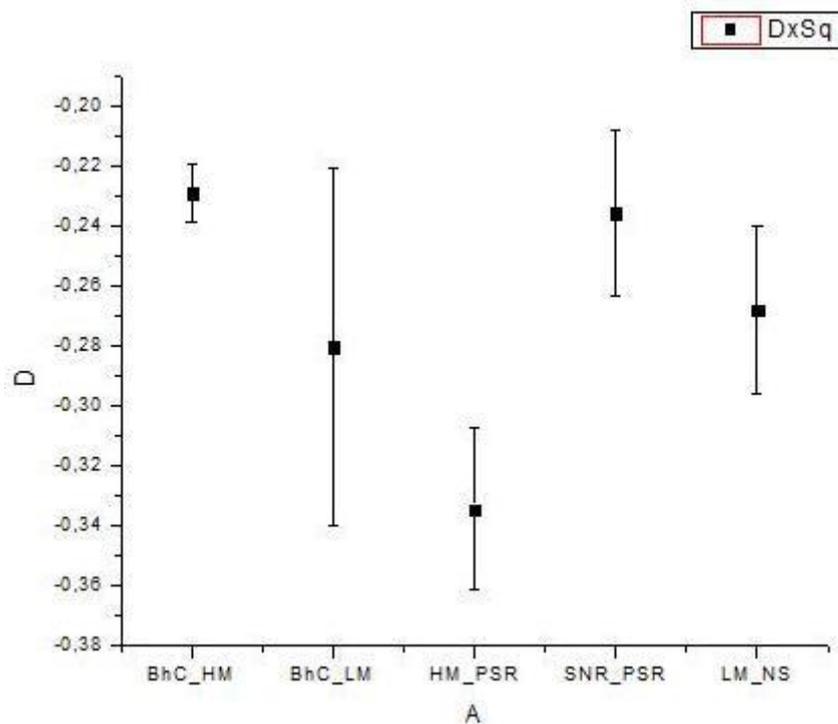
No Gráfico 14, vemos que nas estrelas binárias constituídas de supernova remanescente junto a um pulsar, além das binárias cuja dupla é formada por uma

estrela de alta massa junto a uma candidata a buraco negro, o comportamento difusivo em relação com o índice entrópico parece semelhante, isto é interessante observar, uma vez que estas são as que têm maior campo gravitacional.

Outro aspecto a ser considerado é que existe uma tendência linear de crescimento desta relação ($q \times D$), em termos de difusão, se ajustarmos a ordem em que os grupos estelares aparecem.

As estrelas constituídas de candidatas à buraco negro junto a uma de alta massa apresenta comportamento semelhante às pulsares acompanhadas de remanescentes de supernovas, ao passo que, comparando o índice entrópico com o coeficiente difusivo, as estrelas compostas de candidatas a buracos negros com sua companheira sendo uma estrela de baixa massa apresentam os menores valores.

Gráfico 15 Relação entre a q-entropia e a difusão



Fonte: Autora

O gráfico 15 apresenta cinco grupos de binárias. Ao compararmos as médias dos grupos, nota-se que não há diferença significativa entre as médias de dois subconjuntos de dados.

De um lado os grupos 1 e 5, formados pelos pares binários LM + BHC e SNT + PSR, apresentam comportamentos próximos quanto a sua média, enquanto que os grupos LM + BHC, HM + PSR e LM + NS compõem um outro grupo com ausência de significativa diferença entre as médias.

Percebe-se um comportamento de alta dispersão no grupo HM + PSR 3, cujo intervalo de confiança se estabelece em maior dispersão. Nesse sentido, pode-se acreditar na presença de *outliers* ou então, uma análise de um número maior de estrelas dentro desta categoria nos dê uma ideia melhor das medidas descritivas. Nas HM + PSR percebe-se um intervalo menor, o que torna o referido grupo mais homogêneo e favorável à possíveis interpretações fenomenológicas.

Verifica-se que há uma relação fenomenológica no comparativo da difusão em relação ao índice entrópico e também em relação à q-entropia de Tsallis, o que corrobora a relação direta entre o índice entrópico e a q-entropia.

5.5 Índices entrópicos das XRBSs

Foram analisadas 142 distribuições de intensidade de raios-X advindos das XRBS e estas são distribuições de cauda longa, portanto, q-gaussianas, com valores de q que caracterizam-nas como enquadradas na termoestatística tsalliana.

Nos dados analisados, a entropia proposta por Tsallis, não como uma substituição à de Boltzmann, mas como uma alternativa apropriada a fenômenos físicos que desenvolvem correlações espaço-temporais de longo alcance, tais como a não localidade espacial e temporal expectadas nas XRBSs em análise, verifica que os dados indicam forte intercâmbio de informações no interior do sistema, XRBSs, com a homotetia, externa. Ou seja, verificas-e que o tipo de transformação geométrica que se verifica nos dados, tem-se a alteração do tamanho da figura representativa dos mesmos, mas se mantém as características principais, como a forma, as variações e os ângulos, caracterizando uma multifractalidade nas escalas espacial e temporal, e configurando-se assim um processo de autosemelhança de escala.

Nestas análises verificou-se que o índice entrópico, com média entre 1,37 e

1,41, é, em si, um resultado relevante se considerarmos fontes distintas categorizadas em grupos igualmente diferenciados quanto à fenomenologia característica no contexto de cada uma delas.

Observou-se que a aplicação dos conceitos de não-extensividade caracterizam os dados coletados pelo satélite, pois é fundamentada nas propriedades estatísticas inerentes a este formalismo, ou seja, a não-Gaussianidade das distribuições de probabilidade (estacionárias), funções de correlação lentamente decrescentes no tempo e estrutura multi-fractal.

Caracteriza-se então uma dinâmica do índice entrópico típica da entropia não-extensiva, e que surge na análise das distribuições de probabilidade prospectadas nas soluções da EFP hipotetizadas, e estes casos estão em consonância com a literatura. Por exemplo, Junior (2016), divulga resultados similares ao analisar sistemas astrofísicos mais generalizados, tais como galáxias, variáveis cataclísmicas, blasares, quasares, entre outros.

A análise das curvas de luz correspondentes aos cinco grupos categorizados no presente trabalho, indica um comportamento similar quanto às leis de potências constituintes das relações de longo alcance, mesmo com as características particulares de cada grupo. Os resultados sugerem que as XRBS apresentam auto-afinidade, sendo este um comportamento universal (ZEBENDE *et al.*, 2005).

Tais correlações de longo alcance foram aplicadas a simulações de sistemas autogravitantes (HUBER, PFENNIGER, 2002), na análise de distribuições de galáxias (ANTAL *et al.*, 2009) e na caracterização de auto-similaridade em regiões de atividades solares (MORET, 2014), por exemplo. Para as XRBS, a auto-afinidade da emissão de raios-X representada pelas curvas de luz e a invariância por escala é definida pela taxa de adição de massa ao disco de acreção (LIMA; MORET, 2015; LIMA; MORET, 2016).

5.6 Comparativos dos resultados das hipóteses modeladas

Assim, bem se justificam as diversas tentativas com várias propostas de modelagens, e todas com solução analítica da EFP das XRBSs analisadas, onde as

hipóteses básicas modeladas, nos sub-capítulos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, as mais simplificadas, e as que consideram cenários entrópicos não aditivos, nos sub-capítulos 4.6, 4.7 e 4.8, proporcionam resultados que podem ter representação física real.

É preciso registrar que as condições de contorno hipotetizadas têm sempre soluções convergentes, e por vezes fechadas, e que refletem uma difusão de raios-X sempre em função das condições iniciais considerando-se sempre um consenso das leis físicas aplicáveis nas regiões de influência das respectivas XRBSs.

Assim, o uso do método da decomposição de Adomian, e outros métodos correlatos, como o de Laplace, He-Laplace e outros com outros Kernels, torna a modelagem muito mais suscetível às hipóteses fenomenológicas postas.

No caso específico do método de decomposição do Adomian tem-se como principal vantagem reside no fato de que ela não conduz apenas a um processo analítico, mas sim a uma série convergente com aproximação contínua e rápida, tanto para as soluções fechadas quanto para as abertas, pois todas são, de fato, convergentes. Além disso, o método de Adomian não requer nenhuma técnica de transformação, linearização, discretização das variáveis, convergindo sempre para uma solução analítica e exata (MORET, 2014; HEINTZ, 1978).

Devido ao poder de solução do método da decomposição de Adomian fica evidente que as propostas mais simples (nos sub-capítulos 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5), mesmo com certo respaldo fenomenológico, podem ser abandonadas para dar lugar às propostas mais elaboradas (nos sub-capítulos 4.6, 4.7 e 4.8).

Em especial a solução proposta (nos sub-capítulos 4.7 e 4.8), nos gráficos 8, 9 e 10 evidenciam claramente que a hipótese de condição inicial com uma q -gaussiana (gráfico 8) lastreia os resultados obtidos em trabalhos anteriores e o avanço singular na modelagem com o uso do método de decomposição de Adomian (e seus derivativos) evidenciam nos resultados expressos nos gráficos 9 e 10 que o comportamento probabilístico não apenas remete ao registro de anomalias, a interações de longo alcance, à fractalidades visíveis no próprio gráfico consolidando o preconizado na cinética termostatística generalizada de Tsallis.

Além disto o índice α pode ser ajustado em função dos dados experimentais de forma que cada XRBS venha a ser bem representado com o seu respectivo valor

para a ordem da derivação fracionária que melhor se aplica à modelagem. Isso define características intrínsecas de cada XRBS, permitindo generalizar a proposta de modelagem para esta categoria de objetos astronômicos.

Salientamos que as propostas físicas da termostatística tsalliana, assim como o método de decomposição de Adomian e os seus métodos derivados para mais de uma equação diferencial, acoplada ou não, ou mesmo sistemas de equações diferenciais acoplados, promovem estudos significativos no entendimento e modelagem de sistemas físicos estelares e que podem ser melhor explicitados em trabalhos futuros.

O que se observa, na análise dos resultados prospectados com as hipóteses dos termos difusivo, restaurador e condição inicial do processo de interação das XRBSs analisadas é que, de uma forma geral, com lastro nos valores do índice entrópico q e da proposta da sua interpretação física na dinâmica em sistemas binários de raios-X e da sua fundação cinética da termostatística generalizada de Tsallis que conseguem preconizar, é um comportamento não extensivo e turbulento em difusão de raios-X, inclusive com os registros das anomalias também detectadas nos dados reais, consubstanciando-se em possíveis interações de longo alcance e caracterizando a hipotetizada fractalidade do sistema governante das XRBSs, em especial quando se considera as modelagens em derivação fracionária e soluções da EFP associadas (MORET, 2010; MORET, 2013; MORET, 2014; LIMA; MORET, 2015; LIMA; MORET, 2016).

É preciso lembrar também que as soluções da EFP postas evidenciam um comportamento probabilístico dos processos de difusão de raios-X nestas XRBSs com condições de contorno que enquadram-se não apenas nos dados analisados como altamente correlacionados as hipóteses físicas condizentes com as considerações da entropia não aditiva, conforme verificam-se em modelagens isomorfas em pesquisas mais recentes em áreas distintas (TSALLIS, 2009; TSALLIS, 1988; TSALLIS, 2011; HEINTZ, 1978), o que, em si, legitima a factibilidade das hipóteses consideradas.

Isto posto, observa-se que se verifica uma maior correlação com a distribuição de probabilidades modelada com os dados reais nas propostas, em especial o que refere-se às condições iniciais, que, quando ajustadas na hipótese da

q-gaussiana, permite considerar que as relações de comutação canônicas nas relações difusivas e restauradoras fica-se em função de eventuais ajustes do índice entrópico (q) para cada XRBS analisada, o que não será objeto desta pesquisa, mas se observa que o mesmo pode ser ajustado individualmente para cada XRBS analisada, quiçá outras a prospectar.

6 COMENTÁRIOS FINAIS

6.1 Considerações finais

A principal contribuição deste trabalho foi a comprovação, indireta, da hipótese de existência de propriedades fractais na emissão, em difusão, de radiação eletromagnética na frequência dos raios-X em sistemas astrofísicos, os pares binários estelares, as XRBSs analisadas, bem como a modelagem desta fenomenologia como uma equação de Fokker-Planck com solução iterativa e analítica, com convergência numérica, utilizando-se do método da decomposição de Adomian. Trata-se de análise inédita de dados difusivos, no espectro de raios-X, em sistemas binários estelares, bem como de modelagem singular em EFP associada e com resultados com fortes indicadores de fractalidade associada ao sistema.

Neste sentido considerou-se que a evolução dos satélites artificiais consolidou, através do uso de equipamentos astronômicos embarcados, a coleta de dados referentes a faixas espectroscópicas finas no espectro de raios-X oriundas de sistemas binários de raios-X e que são sistemas auto-gravitantes, onde expecta-se que a termoestatística convencional de Boltzman e Gibbs não são adequadas para descrever o ensemble local devido ao caráter aditivo, e, para tal, considerou-se também, por hipótese, que segue comprovada, de forma indireta e com modelagem analítica, do formalismo termoestatístico de Tsallis (GTS).

Para fomentar a prospecção científica adotou-se como questão norteadora a indagação da atual factibilidade da explicação do comportamento da difusão de raios-X em pares binários astrofísicos como um modelo lastreado no que preconiza a equação de Fokker-Planck, questão essa tornando-se afirmativa,

No que tange aos resultados obtidos, no contexto do fenômeno tratado, várias propostas de termos restauradores e difusivos, em aproximação de primeira ordem, foram usadas, com evento markoviano, com taxas exponenciais congruentes às taxas restauradoras e difusivas e com decaimento unitário e constante, além de decaimento unitário e parametrizado.

A hipótese tsalliana foi utilizada para termos restaurador e difusivo constantes, além de uma proposta da EFP não-linear e fracionária no tempo, com o objetivo de efetuar comparações entre a modelagem e os dados reais de cada par de estrela binária analisada. Por fim, propusemos a solução convergente da EFP para os XRBSs.

O trabalho então descreveu os aspectos da modelagem da difusão de raios-X, com a dedução e posterior a adoção da equação de Fokker-Planck, ou equação avançada de Kolmogórov, com as devidas considerações sobre a evolução da função de probabilidade da emissão de raios-X e com as com diversas variações dos seus coeficientes bem como condições iniciais com lastro no comportamento evidenciado dos dados reais coletados no satélite em registro.

Assim, com a análise dos resultados nas soluções da EFP verificou-se que o sistema em análise, de fato, tem características complexas, com fractalidade no processo de difusão de raios-X bem como nas regiões vizinhas às XRBSs analisadas a Isto tornou-se possível através da adoção dos coeficientes sugeridos na montagem das respectivas hipóteses e, conseqüentemente, da resolução da EFP para cada caso com a técnica da decomposição de Adomian, onde tornou-se possível a compração de tratar-se de sistemas de distribuições de cauda longa (q -gaussianas tsallianas), inclusive com diversas variações das métricas das derivadas associadas.

Resultados das de 142 distribuições de intensidade de raios-X advindos das XRBSs mostraram que estas são distribuições de cauda longa, portanto, q -gaussianas, com valores do índice entrópico q mostram características da termoestatística de Tsallis de forma que estes sistemas gravitantes podem ser interpretados consistentemente em termos de GTS, sendo isto forte indicativo do respaldo fenomenológico da teoria.

6.2 Recomendações para prospecções futuras

Com o exposto, e com as vantagens do uso do método da decomposição de Adomian, considera-se como possível e recomendada a expansão para pesquisas

similares em outras XRBSs como meio de generalizar o que foi prospectado bem como as características da difusão de raios-X e também de ondas eletromagnéticas de outras frequências, oriundas de objetos astronômicos similares.

Essa realidade fomenta o melhoramento das modelagens com novas propostas de análise dos termos restauradores e difusivos da EFP, que descreve os fenômenos de difusão de raios-X por pares binários estelares.

REFERÊNCIAS

ABBAOUI, K.; CHERRUAULT, Y.; SENG, V. **Practical Formulae for the Calculus of Multivariable Adomian Polynomials**. Mathematical and Computer Modelling, 22 (1):89-93, 1995.

ABBAOUI, K.; CHERRUAULT., Y. **Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations**. Computers and Mathematics with Applications, 28 (5):103-109, 1994.

ADOMIAN, G. **A new approach to the Efinger Model for a nonlinear quantum theory for gravitating particles**. Found. of Physics 17 (4). 1987. 419-424.

ADOMIAN, G. A. **New Approach to Nonlinear Partial Differential Equations**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 102:420-434, 1984c.

ADOMIAN, G. **Applications of Nonlinear Stochastic Systems Theory to Physics**. Kluwer. 1988a.

ADOMIAN, G. **Convergent series solution of nonlinear equations**. Comput. and App. Math. 11 (2). 1984a.

ADOMIAN, G. **Decomposition solution for Duffing and Van der Pol oscillators**. Int. J. of Math. Sciences 9 (4). 1988b. 732-732.

ADOMIAN, G. **Explicit Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations**. Applied Mathematics and Computation, 88:117-126, 1997.

ADOMIAN, G. **New results in stochastic equations - The nonlinear case, Nonlinear Equations in Abstract Spaces**. V. Lakshmikanthum (ed.), Academic Press. 1978.

ADOMIAN, G. **Nonlinear stochastic dynamical systems in physical problems**. J. Math. Anal. and Applic. 11. 1985.

ADOMIAN, G. **Nonlinear Stochastic Operator Equations**. Academic Press. 1986.

ADOMIAN, G. **On composite nonlinearities and the decomposition method**. J. Math. Anal. and Applic. 114 (1). 1988c.

ADOMIAN, G. **On the convergence region for decomposition solutions.** J. of Comput. and App. Math. 11. 1984b.

ADOMIAN, G. **Solution of physical problems by decomposition.** Computers & Mathematics with Applications, vol. 27, no. 9-10, pp. 145-154, 1994a.

ADOMIAN, G. **Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method.** Boston, 1994b.

ADOMIAN, G. **Stochastic Green's Functions, Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering.** H. E. Bellman (ed.), Amer. Math. Soc. 1964.

ADOMIAN, G. **Stochastic operators and dynamical systems, Information Linkage Between Applied Mathematics and Industry.** P. C. C. Wang (ed.), Academic Press. 1979.

ADOMIAN, G. **Stochastic Systems.** Academic Press. 1983.

ADOMIAN, G. **Theory of random systems, Trans. of Fourth Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision and Random Processes.** Prague Publ. House. 1967.

ADOMIAN, George. **Solving Frontier of Problems of Physics: The Decomposition Method.** General Analytics Corporation. Athens, Georgia, U.S.A. Fundamental Theories of Physics. Editor: Alwyn Van der Merwe. University of Denver, U.S.A. 1994.

ANTAL, T.; LABINI, S. Sylos; VASILYEV, L.N e BARYSHEV, Y.V. Galaxy distribution and extreme-value statistics. **Europhysics Letters Association, EPL (Europhysics Letters), Vol. 88, N. 5, 2009.**

ARAÚJO, Marcelo Tozo. **Estudo dos Métodos de Solução da Equação de Fokker-Planck Linear e Não Linear.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/87515>. Acesso em: 20 nov 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6022; NBR 6023; NBR 6024; NBR 6027; NBR 6028; NBR 10520; NBR 14724; NBR 15287:** informação e documentação: Artigo em publicação periódica científica impressa: apresentação. Rio de Janeiro, 2003.

BATTANER, Eduardo. **Introduccion a la Astrofísica.** Alianza Editorial. Madrid. 196 p. 1999.

BETZLER, Alberto Silva. **Aplicações da Mecânica Estatística Não Extensiva na Astrofísica de Pequenos Corpos do Sistema Solar**. Tese de Doutorado. UFBA. Salvador, 2015.

BIAZER, J.; GHAZVINI, H. **He's homotopy perturbation method for solving systems of Volterra Integral equations**, Chaos, Solitons, Fractals, vol. 39, pp. 370-377, 2009.

BLACK HOLES, **Imagine the Universe!**, NASA. Accessed on line August 22, 2008.

BOWEN, R. **Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms**. Lecture Notes in Mathematics 470. Springer Verlag, 1975.

CASTILHO, Paulo João & TEIXEIRA, Paulo Ivo Cortez. **Introdução à Física Estatística**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

CHERRUAULT, Y. **Convergence of Adomian's decomposition method**, Math. Comput. Modelling. 1990. p. 83-86.

CHERRUAULT, Y. **Convergence of Adomian's method**. Kybernetes, vol.18, pp.31-38. 1989.

CHERRUAULT, Y.; ADOMIAN, G. **Decomposition Method: A New Proof of Convergence**. Mathematical and Computer Modelling, 18 (12):103- 106, 1993.

DAHMEN, Silvio Renato. **Construção da teoria quântica - história e tendências de pesquisa**. 2008. Disponível em: <http://books.scielo.org/id/xwhf5/pdf/freire-9788578791261-18.pdf>. Acesso em: 20 nov 2021.

DAHMEN, Silvio Renato. **Max Planck on Statistical Thermodynamics and Stochastic Systems**. In: [Hoffmann 2008], S. 335 ff.

DEBNATH, L. **Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**, Birkhäuser, 1997.

FERMI, Enrico. **Thermodynamics**. Nova York: Dover Publications, 1956.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica**. Rio Grande do Sul: Depto de Física, 2014.

FRANK, Till Daniel. **Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications**. Universität M"unster Institut f"ur Theoretische Physik. 2005.

FREEDMAN, R. A.; KAUFMANN III, W. J. **Universe**. 7^a edition, W. H. Freeman. Company, New York. 2020.

GHORBANI. **Beyond Adomian polynomials: he polynomials**. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 39, no. 3, pp. 1486-1492, 2009.

GIACCONI, R., GURSKY, H., PAOLINI, F. R., & ROSSI, B. B. **Evidence for X-rays from sources outside the solar system**. *Physical Review Letters*, 9, 1962. 439-443.

GOLBABAI. A.; JAVIDI, M. **A variational iteration method for solving parabolic partial differential equations**, Computers & Mathematics with Applications, vol. 54, no. 7-8, pp. 987-992, 2007.

HE, J.H. **Recent development of the motopy perturbation method**, Topological methods in Nonlinear Analysis, vol. 31, no. 2, pp. 205-209, 2008.

HE, Ji-Huan. **A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems**. Internat. J. Non-Linear Mech., vol. 35, 2000b. pp. 37-43.

HE, Ji-Huan. **Homotopy perturbation technique**. Comput. Methods Appl. Mech., vol. 178, 1999. pp. 257-262.

HE. J. H. **A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems**. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 35, no. 1, pp. 37-43, 2000a.

HE. J. H. **Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equation**. Chaos, Solitons, Fractals, vol. 26, pp. 295-300, 2005. View at Google Scholar.

HEINTZ, W. D. **Double Stars**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. p. 4. ISBN 90-277-0885-1. 1978.

HILDITCH, R. W. **An introduction to close binary stars**. University of St. Andrews, Scotland. Cambridge University Press: 2001.

HUBER, D.; PFENNIGER, D. **Long-range correlations in self-gravitating N-body systems**. *Astronomy & Astrophysics*, p. 359. 2002.

JR ROSA, J.C.O., JESUS, J.C.O de; MORET, Marcelo A. **Nonextensivity and entropy of astrophysical sources**. *Physica A* 392 (2013) 6079-6083.

JUNIOR, Antônio César do Prado Rosa. **Sistemas Complexos Não-aditivos: Aplicações em Astrofísica, Química e Engenharias**. Tese de Doutorado. Centro Universitário SENAI/CIMATEC. Salvador, 2016.

KALER, J.B., **The Cambridge Encyclopaedia of Stars**. Inglaterra: Cambridge University Press, 2006.

KALIRAI, Jasonjot Singh. **Astrophysics with White Dwarfs**. Tese de Doutorado. University of British Columbia, 2004.

KANTZ, H. & SCHREIBER, T.: **Nonlinear Time Series Analysis**. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

KHAN, Y.; AUSTIN, F. **Application of the Laplace decomposition method for nonlinear homogenous and non-homogenous advection equations**, Zeitschrift fuer Naturforschung A, vol. 65, no. 2, pp. 1-5, 2010.

KRISHNAMURTHY. E. V.; SEN, S. K. **Numerical Algorithm Computations in Science and Engineering**. East-West Press, 2001.

KUTNER, M. L., **Astronomy: A Physical Perspective**, 2nd edition, Cambridge University. Press, United Kingdom. 2003.

LADA, Charles. **Stellar Multiplicity and The IMF: Most Stars Are Single**. Astrophys Journal, 640 (pp.63-66), 2006.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de. **Fundamentos da metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2019.

LAPLACE, Pierre Simon. **Exposition du Systeme du Monde**. Paris: Cercle-Social, 1796.

LIMA, M. S.; MORET, M. A. . **Análise das Séries Temporais de Raios-X Oriundas de Sistemas Astrofísicos Binários, Utilizando uma Proposta de Modelagem Matemática Lastreada na Equação Não-linear de Fokker-Planck**. In: II Workshop de Gestão, Tecnologia Industrial e Modelagem Computacional, 2016, Salvador. Anais do II Workshop de Gestão, Tecnologia Industrial e Modelagem Computacional, 2016.

LIMA, M. S.; MORET, M. A. **Non-extensivity of the X-ray binary systems**. In: Encontro Nacional de Física Estatística, 2015, Vitória. Livro de Resumos do Encontro Nacional de Física Estatística, 2015.

LIPUNOV, V. M., BÖRNER, G.; WADHWA, R. S. **Astrophysics of Neutron Stars**. Berlin: Springer, 1992.

MADEJSKY, Rainer Karl. **Curso de Astrofísica e Cosmologia. 1 - O sistema solar, as estrelas e a Via Láctea.** Feira de Santana, BA, 2014.

MICHAUD, Georges; ELCIAN, Georges; RICHER, Jacques. **Atomic Diffusion in Stars.** Springer International Publishing Switzerland: London, 2015.

MILONE, André de Castro *et al.* **Introdução à Astronomia e Astrofísica.** São Paulo: INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais), 2003.

MORET, Marcelo A. *et al.* **X-ray Binary Systems and Nonextensivity.** Physica A 389, 854_858, 2010.

MORET, Marcelo A. **Self-affinity and nonextensivity of sunspots.** Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, pp. 494-496, 2014.

Neutron Star X-ray binaries. Arquivado em 10 de dezembro de 2008, no Wayback Machine., A Systematic Search of New X-ray Pulsators in ROSAT Fields, Gian Luca Israel, Ph. D. thesis, Trieste, October 1996.

OKSENDAL, B. **Stochastic Differential Equations.** Springer International. 2004.

OLDHAM, K.B.; SPANIER, J. **The Fractional Calculus.** New York and London: Academic Press. 1974.

OLIVEIRA, Newton B. **Oscilações Elétricas. Onda Eletromagnética, Óptica Física e Física Moderna.** Salvador: EDUFBA, 2015.

OSORIO, Yesson Fabian M. **Determinação do Período Orbital de Sistemas Binários Eclipsantes.** Dissertação de Mestrado, IF/UFRN, Natal. 2009.

PEDRON, Isabel Tâmara. **Estudos em Difusão Anômala.** Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade Estadual de Maringá. Maringa, 2003.

PENG, Fang., BROWN, Edward F.; TRURAN, James. W. **Sedimentation and Type I X-Ray Bursts at Low Accretion Rates.** Astrophysical Journal, 654, 1022, 2007. Disponível em: <http://iopscience.iop.org/article/10.1086/509628/meta>. Acesso em: 20 dez 2017.

PODLUBNY. I. **Fractional Differential Equations.** San Diego, California, USA: Academic Press. 1999.

RIBEIRO, Maurício de Souza. **Estudo de Equações de Fokker-Planck Não lineares e Aplicações**. Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, RJ, 2012.

RICCI, L. *Et al.* ALMA Observations Of ρ -OPH 102: **Grain Growth and Molecular Gas in the Disk Around a Young Brown Dwarf**. Chile: Alma Observatory, 2012

RISKEN, H. **The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

ROSSI. **Rossi X-Ray Timing Explorer (RXTE)**. Disponível em <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xte/XTE.html>. Acesso em: 20 nov 2021.

SILVEIRA, Patrick da Rosa. **Estrelas de Nêutrons como Fontes de Ondas Gravitacionais e a Detecção do Modo Fundamental**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: INPE, 2012.

SKIPPER, Chris. **Fast Spectral Variability in the X-ray Emission of Accreting Black Holes**, Doutoral Thesis, University Southampton, UK. 2015.

SOBRINHO, J.L.G. **Estrelas Binárias e Estrelas Variáveis**. Portugal: Grupo de Astronomia da Universidade da Madeira, 2013.

SOTER, Steven. TYSON, Neil deGrasse. **Cosmic Horizons: Astronomy at the Cutting Edge**. New York: New Press, 2001.

TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. **Dinâmica estocástica e irreversibilidade**. São Paulo: Edusp, 2001.

TSALLIS, Constantino. **Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics**. Springer: Rio de Janeiro, 2009.

TSALLIS, Constantino. **Possible generalization of Boltzmann-Gibbs entropy**, J. Stat. Phys, 52,479, 1988.

TSALLIS, Constantino; RUIZ, Guiomar. **Introducción a la Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs**. CBPF: Rio de Janeiro, 2011.

ZEBENDE, Gilney F. PEREIRA, Marildo G.; JUNIOR, E. Nogueira; MORET, Marcelo A. **Universal persistence in astrophysical sources**. Physica A, Vol. 349, P. 452-458, 2005.

APÊNDICE A - Cálculos Estimados dos Coeficientes de Difusão dos Pares Binários

$$D = \frac{2}{k} \left[\frac{A^{(q-1)}}{2-q} \right]$$

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
1 - Flare	aqlx1_562	9182,81	14,29	1,55	-0,26	0,00		46,12	-1105,22
1 - Flare	cal83_561	2395,36	1,19	1,36	0,04	0,00		42,17	96,74
1 - Flare	cenpx4_562	5643,68	1,22	1,39	0,02	0,00		79,81	105,78
1 - Flare	cirx1_562	863,02	65178,00	-13,77	-0,91	0,00		0,00	0,00
1 - Flare	cygx2_562	1423,49	0,46	0,83	-0,09	0,00		1,08	-107,24
1 - Flare	gammacas_561	7538,96	1,14	1,34	0,01	0,00		57,70	101,67
1 - Flare	gcx-1_562	4101,00	1,34	1,34	0,03	0,00		40,02	132,46
1 - Flare	groj1744-28_562	6710,80	1,41	1,45	0,01	0,00		142,32	98,73
1 - Flare	gs1826-238	9337,97	1,96	1,37	-0,04	0,00		49,33	-328,05
1 - Flare	gx3+1	1620,26	0,32	0,37	-0,01	0,00		0,04	-21,05
1 - Flare	gx5-1	974,15	0,29	0,40	0,02	0,00		0,07	19,34
1 - Flare	gx9+1	2643,42	0,47	0,90	-0,04	0,00		1,68	-101,10
1 - Flare	gx9+9	3975,02	0,93	1,25	-0,06	0,00		23,01	-219,79
1 - Flare	gx17+2	2312,16	1,58	1,27	-0,21	0,00		13,96	-287,27
1 - Flare	gx354-0	4617,46	1,69	1,49	0,03	0,00		141,06	162,60

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
1 - Flare	x0614+091	4302,03	1,43	1,54	-0,08	0,00		273,48	-274,63
1 - Flare	x0836-429	4583,22	1,27	1,39	-0,02	0,00		71,87	-90,54
1 - Flare	x1323-619	4000,16	1,12	1,35	-0,01	0,00		47,86	-42,08
1 - Flare	x1543-475	18169,28	72,61	1,45	-0,08	0,00		3,93	-1190,44
1 - Flare	x1543-624	3598,51	1,61	1,33	0,05	0,00		26,88	186,23
1 - Flare	x1556-605	6128,63	1,41	1,42	0,01	0,00		96,99	56,43
1 - Flare	x1608-522	5727,32	19,13	1,44	-0,30	0,00		8,85	-717,35
1 - Flare	x1624-490	8232,21	1,58	1,38	0,03	0,00		60,37	219,21
1 - Flare	x1916-053	5474,05	1,34	1,35	0,00	0,00		46,86	1,24
1 - Flare	x2127+119	10654,44	1,41	0,02	0,02	0,00		0,00	211,97
1 - Flare		5368,38	2612,37	0,61	-0,07	0,00		51,02	-123,69
2 - LMNS	aqlx1_562	9182,81	14,29	1,55	-0,26			46,12	-1105,12
2 - LMNS	cen4_562	3322,34	1,38	1,47	0,03			124,58	104,42
2 - LMNS	cirx1_562	863,02	0,65	-13,77	-0,91			0,00	0,00
2 - LMNS	cyqx1_562	2347,16	8,10	1,90	-0,52			2476,42	-107,64
2 - LMNS	gammacas_561	7538,96	1,14	1,34	0,01			57,70	101,67
2 - LMNS	gxc-1_562	4101,01	1,34	1,34	0,03			40,02	132,46
2 - LMNS	groj1744-28_562	3180,94	4,16	1,55	-0,07			87,43	-186,38
2 - LMNS	gs1826-238_562	9337,98	1,96	1,37	-0,04			49,33	-328,05
2 - LMNS	gx3+1_562	1620,26	0,32	0,37	-0,01			0,04	-21,05
2 - LMNS	gx5-1_562	974,15	0,29	0,40	0,02			0,07	19,34
2 - LMNS	gx9+1_562	2643,42	0,47	0,90	-0,04			1,68	-101,28
2 - LMNS	gx9+9_562	3975,02	0,93	1,25	-0,06			23,01	-220,00

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
2 - LMNS	gx17+2_562	2312,16	1,58	1,27	-0,21			13,96	-287,27
2 - LMNS	gx354-0_562	4617,46	1,69	1,49	0,03			141,06	162,60
2 - LMNS	x0614+091_562	4302,03	1,43	1,54	-0,08			273,48	-274,63
2 - LMNS	x0836-429_562	4583,22	1,27	1,39	-0,02			71,87	-90,54
2 - LMNS	x1323-619_562	4000,16	1,12	1,35	-0,01			47,86	-42,08
2 - LMNS	x1543-475_562	18169,29	72,61	1,45	-0,08			3,93	-1190,44
2 - LMNS	x1543-624_562	3598,51	1,16	1,33	0,05			37,19	186,23
2 - LMNS	x1556-605_562	6128,63	1,41	1,42	0,01			96,99	56,43
2 - LMNS	x1608-522_562	5727,32	16,13	1,44	-0,30			10,50	-717,35
2 - LMNS	x1624-490_562	8232,21	1,58	1,38	0,03			60,37	219,21
2 - LMNS	x1916-053_562	5474,05	1,34	1,35	0,00			46,86	1,24
2 - LMNS	x2127+119_562	6273,45	1,39	1,42	0,02			98,03	127,65
2 - LMNS		5104,40	5,74	0,69	-0,10			158,69	-148,36
3	Crab_561	3649,06	1,02	1,34	0,00			48,22	4,68
3	velapulsar_562	3996,38	0,98	1,26	0,00			24,21	6,94
3	x0726-260_562	5249,89	1,28	1,39	0,01			70,25	76,26
3	xtej1118+480_562	7070,90	1,80	1,55	-0,01			322,84	-100,03
3	grs1716-249_562	5620,48	1,55	1,48	0,06			164,26	366,28
3		5117,34	1,33	1,40	0,01			125,96	70,83
4	grs1737-31_562	4674,10	1,70	1,49	0,04			141,80	180,21
4	grs1915+105_562	1349,66	1,83	1,63	-0,47			278,59	-102,82
4	gs1124-684_562	7111,45	1,37	1,43	0,04			112,55	312,76

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
4	gx339-4_562	3286,61	35,41	1,79	-0,47			164,60	-222,26
4	x0620-003_562	6485,54	1,64	1,50	0,02			189,00	105,52
4	x1543-475_562	18169,29	72,61	1,45	-0,08			3,93	-1190,44
4	xtej1550-564_562	2937,29	0,01	-12,11	-2,25			0,00	0,00
4	xtej1748-288_562	1926,44	2,31	1,44	-0,03			44,97	-57,36
4	xtej1755-324_562	2638,19	2,40	1,55	-0,01			140,11	-28,01
4	xtej1720-318_562	4288,27	2,05	1,56	0,00			233,15	-17,27
4	groj2058+42_562	4743,77	1,13	1,37	0,03			67,68	170,42
4		5237,33	11,13	0,28	-0,29			125,13	-77,20
5 - HM+PSR	gs1843+009_562	5073,32	1,44	1,43	0,03			91,95	176,95
5 - HM+PSR	gx1+4_562	3234,43	1,20	1,38	-0,01			59,31	-28,12
5 - HM+PSR	gx301-2_562	3901,23	1,85	1,49	-0,19			123,56	-442,33
5 - HM+PSR	herx1_562	4743,77	1,13	1,37	0,03			67,68	170,42
5 - HM+PSR	velax1_562	3921,35	0,94	1,07	-0,25			4,28	-551,97
5 - HM+PSR	x0114+650_561	3864,56	1,06	1,30	0,00			32,93	10,30
5 - HM+PSR	x0115+634_561	7466,37	4,02	1,43	-0,14			40,32	-718,45
5 - HM+PSR	x0535+262_561	18207,72	2,33	1,45	0,00			136,40	-35,34
5 - HM+PSR	x1145-616_562	3466,10	1,17	1,35	0,01			45,54	30,56
5 - HM+PSR	x1145-619_562	4241,87	1,47	1,46	0,02			116,20	72,09
5 - HM+PSR	x1538-522_562	5061,23	1,33	1,38	0,00			60,42	-5,25
5 - HM+PSR	x1553-542_562	4771,75	1,67	1,50	0,03			171,84	142,99
5 - HM+PSR	x1908+075_562	5717,14	1,47	1,44	0,01			106,04	78,16
5 - HM+PSR	xper_561	5467,03	1,31	1,43	-0,09			104,09	-400,68

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
5 - HM+PSR	xtej1543-568_562	3954,07	1,50	1,43	0,02			82,53	95,91
5 - HM+PSR	X0918-548_562	8319,00	1,24	1,31	0,02			38,96	163,21
5 - HM+PSR		5713,18	1,57	1,39	-0,03			80,13	-77,60
6 - LM + LM	X0921-630_562	4450,74	1,19	1,37	0,02			59,17	94,91
6 - LM + LM	X1145-616_562	3466,10	1,17	1,35	0,01			45,54	30,56
6 - LM + LM	X0142+614_561	6151,75	1,25	1,37	0,03			61,31	167,23
6 - LM + LM	X1957+115_562	6016,54	1,15	1,35	0,03			55,79	164,84
6 - LM + LM	SS433_562	6206,93	1,53	1,45	0,01			126,86	90,45
6 - LM + LM	X0114+650_561	3864,56	1,06	1,30	0,00			32,93	10,30
6 - LM + LM	xtej0421+560_561	9549,02	2,71	1,44	0,00			76,65	-29,00
6 - LM + LM		5672,23	1,44	1,38	0,01			65,46	75,61
7 - hm+bhc E lm+bhc	cygx1_562	2347,16	8,10	1,90	-0,52			2476,42	-107,64
7 - hm+bhc E lm+bhc	cygx3_562	1888,26	4,51	2,06	-0,56			-21146,64	-52,40
7 - hm+bhc E lm+bhc	groj1655-40_562	11971,32	524,66	1,37	-0,49			0,20	-1097,51
7 - hm+bhc E lm+bhc	groj0422+32_561	6710,80	1,41	1,45	0,01			142,32	98,73
7 - hm+bhc E lm+bhc	cal87_561	4018,64	1,23	1,38	0,05			60,13	224,58
7 - hm+bhc E lm+bhc	grs1716-249_562	5620,48	1,55	1,48	0,06			164,26	366,28
7 - hm+bhc E lm+bhc	grs1737-31_562	4674,10	1,70	1,49	0,04			141,80	180,21

Tipo	Estrelas	A	K	q	c	y0		Difusão	D Analítica Expandida em Série de Taylor
7 - hm+bhc E lm+bhc	grs1915+105_562	1349,66	1,83	1,63	-0,47			278,59	-102,82
7 - hm+bhc E lm+bhc	gs1124-684_562	7111,45	1,37	1,43	0,04			112,55	312,76
7 - hm+bhc E lm+bhc	gx339-4_562	3286,61	35,41	1,79	-0,47			164,60	-222,26
7 - hm+bhc E lm+bhc	x0620-003_562	6485,54	1,64	1,50	0,02			189,00	105,52
7 - hm+bhc E lm+bhc	x1543-475_562	18169,29	72,61	1,45	-0,08			3,93	-1190,44
7 - hm+bhc E lm+bhc	xtej1550-564_562	2937,29	0,01	-12,11	-2,25			0,00	0,00
7 - hm+bhc E lm+bhc	xtej1748-288_562	1926,44	2,31	1,44	-0,03			44,97	-57,36
7 - hm+bhc E lm+bhc	xtej1755-324_562	2638,19	2,40	1,55	-0,01			140,11	-28,01
7 - hm+bhc E lm+bhc		5409,02	44,05	0,65	-0,31			-1148,52	-104,69

**Todas as
Estrelas**

5361,69

626,81

0,82

-0,12

-81,27

-89,09

APÊNDICE B - Soluções Editadas do Wolfram Mathematica 12.1

Conforme citado na metodologia do trabalho lista-se aqui as edições das soluções ensaiadas e adotadas na edição final da pesquisa, entretanto merece considerar que outras muitas simulações foram adotadas na pesquisa e nos diversos ensaios das hipóteses prospectadas.

Desta forma tem-se a seguir o programa geral que simula as iterações preconizadas no método de decomposição de Adomian:

Algoritmo de Interação de Adomian (Wolfram Mathematica 12.1)

```
=====
Clear; Clear; Clear;
Clear[x]; Clear[t]; Clear[TT]; Clear[q]; Clear[P]; Clear[alpha]; \
Clear[Termo]; Clear[H]; Clear[a];
Termo = 3;
P = (1/(x*x));
H = (1/(x*x));
P = (1/(x*x))*(1 - (1 - q)*(x*x)^(1/(1 - q)));
H = (1/(x*x))*(1 - (1 - q)*(x*x)^(1/(1 - q)));

Print [" "];
Print [ " \
-----" \
];
Print [ " "];
Print [ " Apresentamos agora várias soluções para a equação de \
Fokker-Planck para uma mesma "];
Print [ " configuração de termos difusivos e restaurador com \
variações no alpha e no que de Tsalis:"];
Print [ " \
-----" \
];
Print [ " "];
Print [ "      Termos calculados analiticamente com o método de \
Adomian:"];
Print [ " "];
Print[" Condição inicial: ", Simplify[P]]
Print [ " "];
a = 0;
TT = P;

Restaurador = -(1/(1 + Exp[-x^2/1000]));
Difusivo = ((1 - (1 - q)*x)^(1/(1 - q)))*Exp[x/100];

Restaurador = -(1/(1 + Exp[-x^2/1000]));
```

```

Difusivo = x^(1 - q)*Exp[-x/100];

Restaurador = -1/x;
Difusivo = x;

P4 = P;
While[a < Termo,
  Print["P", a, "(x)", " = ", Simplify[P4]];
  P1 = Restaurador*D[P, x];
  P2 = Difusivo*D[P1, x];
  P3 = -P1 + P2;
  P4 = InverseLaplaceTransform[(1/(s^alpha))*
    LaplaceTransform[ Simplify[P3], t, s], s, t];
  P = P4;
  a = a + 1;
  TT = TT + P4;
]
Print["P", a, "(x)", " = ", Simplify[P4]];
Print [" "];
Print [" "];
Print["Solução da Equação de Fockker-Planck com ", a, " termos"];
Print [" "];
Print [" Termo restaurador: ", Simplify[Restaurador], " ",
  "Termo difusivo: ", Simplify[Difusivo]];
Print [" "];
Print["P(x)", " = ", Simplify[TT]];
Print [" "];
Print [" Condição Inicial: "];
Plot3D[{H}, {x, -3, 3}, {q, 0.1, 10}, AxesLabel -> {"X", "q"}

alpha = 0.4;
q = 10;
Print[" Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=", alpha,
  " Parâmetro Real de Tsalis (q)=", q];
Print[" "];
Print [" Termo Restaurador: "];
Plot[{Restaurador}, {x, -3, 3}]
Print [" "];
Print [" Termo Difusivo: "];
Plot[{Difusivo}, {x, -3, 3}]
Print [" Solução: "];
Plot3D[{TT}, {x, -50, 50}, {t, 0, 0.1}, AxesLabel -> {"X", "t"}]
Print [" "];
Print["----- Fim da Solução: \
-----\
"];
Print [" "];
Print [" "];
Print [" FIM FIM FIM FIM FIM "];
=====

```

Com este algoritmo iterativo, que acaba por gerar cada termo da série decomposta, em conformidade ao preconizado no método de decomposição de Adomian, tem-se a geração de cada solução adotada na pesquisa ajustando-se apenas os seus dados iniciais, as condições iniciais e também os respectivos coeficientes adotados:

* (Sub-Cap. 4.2) Termo restaurador e difusivo constantes e termo estacionário linear

Apresentamos agora várias soluções para a equação de Fokker-Planck para uma configuração de termos difusivos e restaurador com variações no alpha e no -----

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

Condição inicial: x

$$P_0(x) = x$$

$$P_1(x) = t$$

$$P_2(x) = 0$$

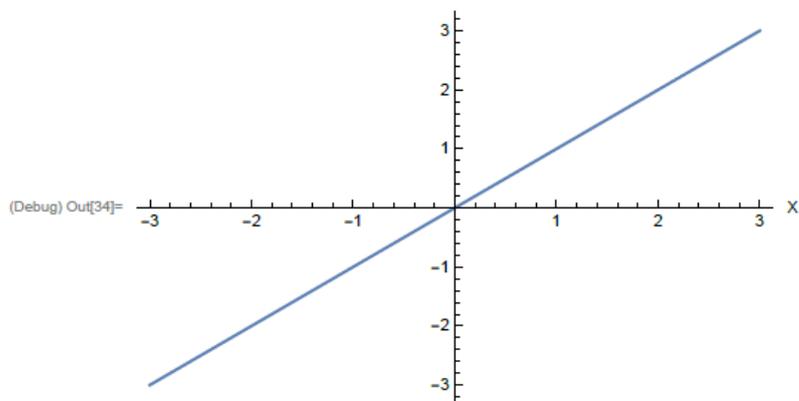
$$P_3(x) = 0$$

Solução da Equação de Fokker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: -1 Termo difusivo: 1

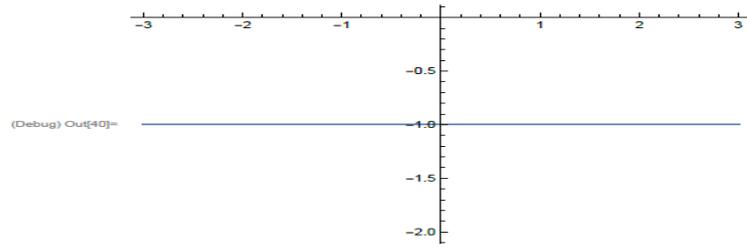
$$P(x) = t + x$$

Condição Inicial:

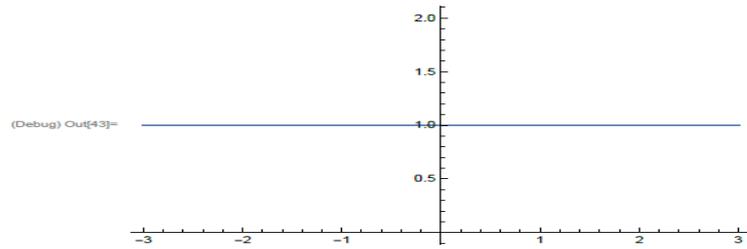


Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=1 Parâmetro Real de Tsallis (q)=1

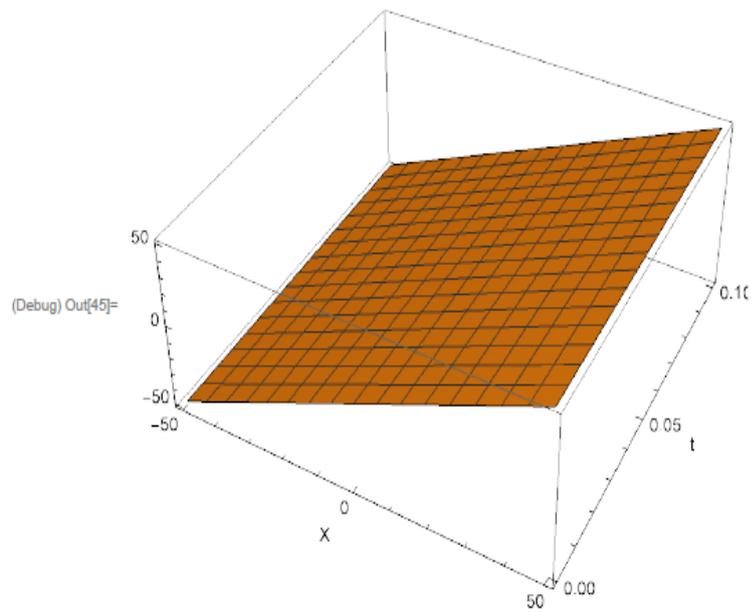
Termo Restaurador:



Termo Difusivo:



Solução:



Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: -1 Termo difusivo: 1

$$P(x) = t + x$$

* (Sub-Cap. 4.3) EFP com propostas hiperbólicas para a emissão, expansão e decaimento

$$P0(x) = \text{Sinh}[x]$$

$$P1(x) = (-1 + e^t) \text{Cosh}[x]^2 (-1 + (1 + e^t) \text{Sinh}[x])$$

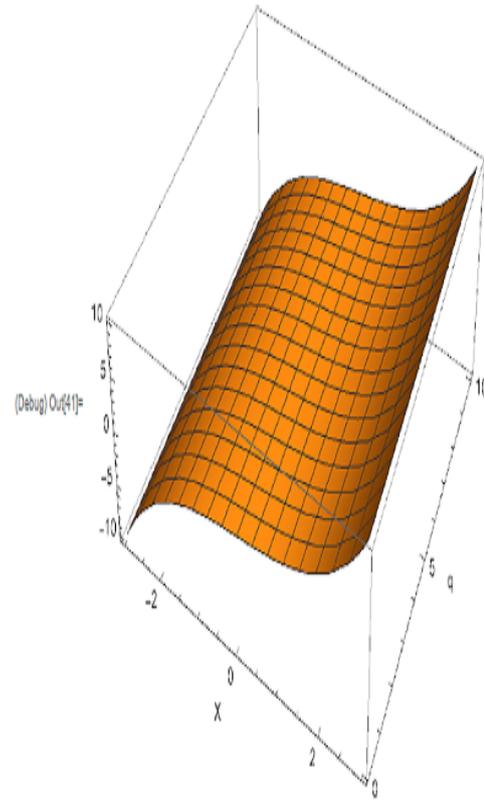
$$P2(x) = \frac{1}{4} (-1 + e^t)^2 \text{Cosh}[x]^2 (-6 (1 + e^t) \text{Cosh}[2x] - (-3 + 2 e^t + e^{2t}) \text{Sinh}[x] + (1 + e^t) (2 + 3 (1 + e^t) \text{Sinh}[3x]))$$

$$P3(x) = \frac{1}{48} (-1 + e^t)^3 \text{Cosh}[x]^2 (2 - 12 e^t - 6 e^{2t} - 24 \text{Cosh}[2x] - 90 (1 + e^t)^2 \text{Cosh}[4x] - 22 \text{Sinh}[x] - 18 e^t \text{Sinh}[x] + 6 e^{2t} \text{Sinh}[x] + 2 e^{3t} \text{Sinh}[x] + 87 \text{Sinh}[3x] + 117 e^t \text{Sinh}[3x] + 45 e^{2t} \text{Sinh}[3x] + 15 e^{3t} \text{Sinh}[3x] + 45 \text{Sinh}[5x] + 135 e^t \text{Sinh}[5x] + 135 e^{2t} \text{Sinh}[5x] + 45 e^{3t} \text{Sinh}[5x])$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: $e^t \text{Cosh}[x]$ Termo difusivo: $e^t \text{Cosh}[x]$

$$P(x) = \text{Sinh}[x] + (-1 + e^t) \text{Cosh}[x]^2 (-1 + (1 + e^t) \text{Sinh}[x]) + \frac{1}{4} (-1 + e^t)^2 \text{Cosh}[x]^2 (-6 (1 + e^t) \text{Cosh}[2x] - (-3 + 2 e^t + e^{2t}) \text{Sinh}[x] + (1 + e^t) (2 + 3 (1 + e^t) \text{Sinh}[3x])) + \frac{1}{48} (-1 + e^t)^3 \text{Cosh}[x]^2 (2 - 12 e^t - 6 e^{2t} - 24 \text{Cosh}[2x] - 90 (1 + e^t)^2 \text{Cosh}[4x] - 22 \text{Sinh}[x] - 18 e^t \text{Sinh}[x] + 6 e^{2t} \text{Sinh}[x] + 2 e^{3t} \text{Sinh}[x] + 87 \text{Sinh}[3x] + 117 e^t \text{Sinh}[3x] + 45 e^{2t} \text{Sinh}[3x] + 15 e^{3t} \text{Sinh}[3x] + 45 \text{Sinh}[5x] + 135 e^t \text{Sinh}[5x] + 135 e^{2t} \text{Sinh}[5x] + 45 e^{3t} \text{Sinh}[5x])$$



Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=1 Parâmetro Real de Tsallis (q)=1

* (Sub-Cap. 4.4) EFP com taxas unitárias e com condição inicial com decaimento exponencial

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

$$P_2(x) = 2 e^{-x} t^2$$

$$P_3(x) = \frac{4}{3} e^{-x} t^3$$

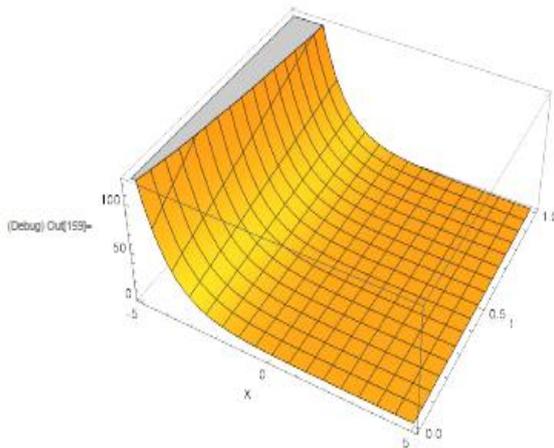
Condição inicial: e^{-x}

$$P_0(x) = e^{-x}$$

$$P_1(x) = 2 e^{-x} t$$

Solução:

(Debug) Out(158) $e^{-x} (1 + 2t)$

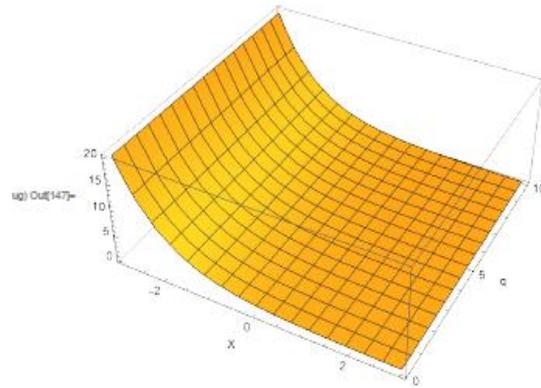


Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: 1 Termo difusivo: 1

$$P(x) = \frac{1}{3} e^{-x} (3 + 6t + 6t^2 + 4t^3)$$

Condição Inicial:



Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=1 Parâmetro Real de Tsallis (q)=1

* (Sub-Cap. 4.5) EFP com taxas unitárias e com decaimento exponencial ajustável

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

Condição inicial: $e^{-aa x}$

$$P_0(x) = e^{-aa x}$$

$$P_1(x) = \frac{aa (1 + aa) e^{-aa x} t^{\alpha}}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

$$P_2(x) = \frac{aa^2 (1 + aa)^2 e^{-aa x} t^{2\alpha}}{\Gamma[1 + 2\alpha]}$$

$$P_3(x) = \frac{aa^3 (1 + aa)^3 e^{-aa x} t^{3\alpha}}{\Gamma[1 + 3\alpha]}$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: 1 Termo difusivo: 1

$$P(x) = e^{-aa x} \left(1 + \frac{aa (1 + aa) t^{\alpha}}{\Gamma[1 + \alpha]} + \frac{aa^2 (1 + aa)^2 t^{2\alpha}}{\Gamma[1 + 2\alpha]} + \frac{aa^3 (1 + aa)^3 t^{3\alpha}}{\Gamma[1 + 3\alpha]} \right)$$

* (Sub-Cap. 4.6) EFP fracionária no tempo com a derivação fracionária de Caputo

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

Condição inicial: $e^{-0.5x}$

$$P_0(x) = e^{-0.5x}$$

$$P_1(x) = \frac{0.75 e^{-0.5x} t^{\alpha}}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

$$P_2(x) = \frac{0.5625 e^{-0.5x} t^{2\alpha}}{\Gamma[1 + 2\alpha]}$$

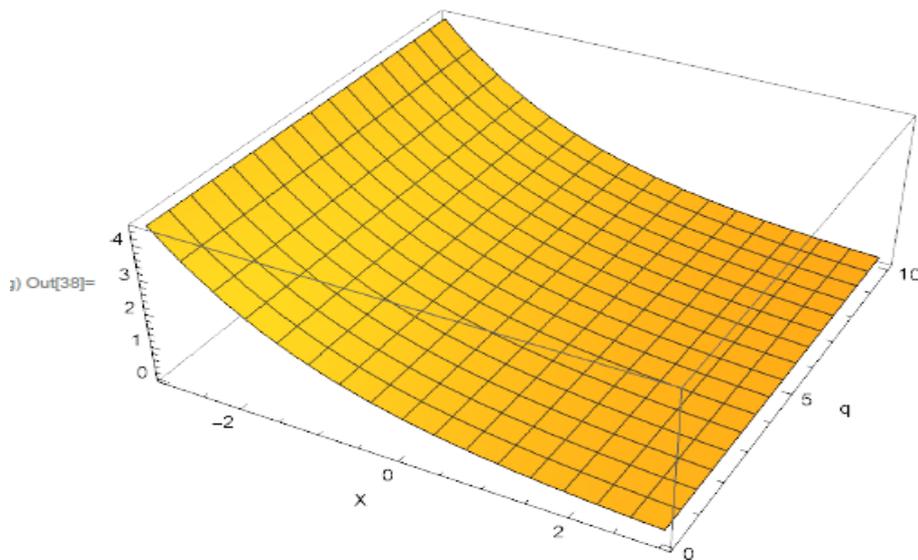
$$P_3(x) = \frac{0.421875 e^{-0.5x} t^{3\alpha}}{\Gamma[1 + 3\alpha]}$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: 1 Termo difusivo: 1

$$P(x) = e^{-0.5x} \left(1 + \frac{0.75 t^{\alpha}}{\Gamma[1 + \alpha]} + \frac{0.5625 t^{2\alpha}}{\Gamma[1 + 2\alpha]} + \frac{0.421875 t^{3\alpha}}{\Gamma[1 + 3\alpha]} \right)$$

Condição Inicial:



Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=0.4 Parâmetro Real de Tsallis (q)=10

* (Sub-Cap. 4.7) EFP fracionária de Caputo (α) e comportamento de uma q-gaussiana

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

Condição inicial: x

$$P_0(x) = x$$

$$P_1(x) = \frac{t^{\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

$$P_2(x) = \frac{t^{2\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + 2\alpha]}$$

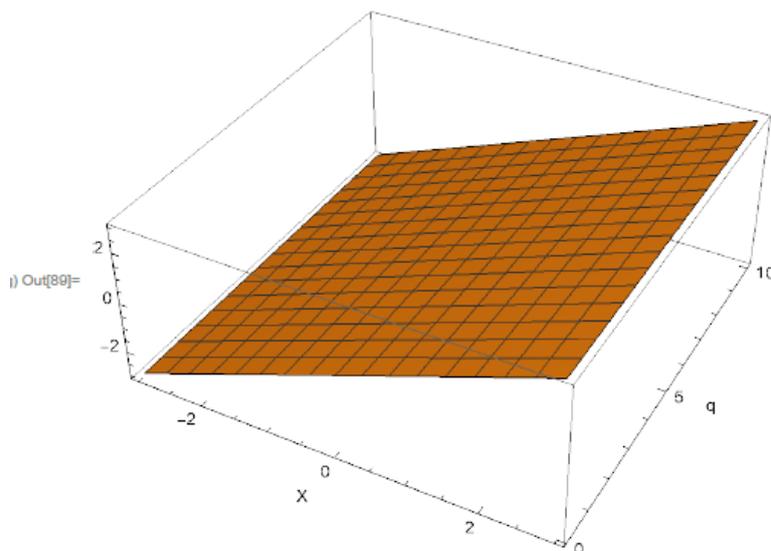
$$P_3(x) = \frac{t^{3\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + 3\alpha]}$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

Termo restaurador: $-x$ Termo difusivo: 1

$$P(x) = x + \frac{t^{\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + \alpha]} + \frac{t^{2\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + 2\alpha]} + \frac{t^{3\alpha} (-1 + x)}{\Gamma[1 + 3\alpha]}$$

Condição Inicial:



Ordem da Derivada Fracionária (α)=0.4 Parâmetro Real de Tsallis (q)=10

* (Sub-Cap. 4.8) EFP fracionária no tempo com efeito memória de Caputo (α) e condição inicial q-gaussiana

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

$$\text{Condição inicial: } (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$P_0(x) = (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$P_1(x) = -\frac{2 t^{\alpha} x (1 + (-1 + q) x^2)^{-2+\frac{1}{1-q}} (-2 + x + 2 x^2 + (-1 + q) x^3)}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

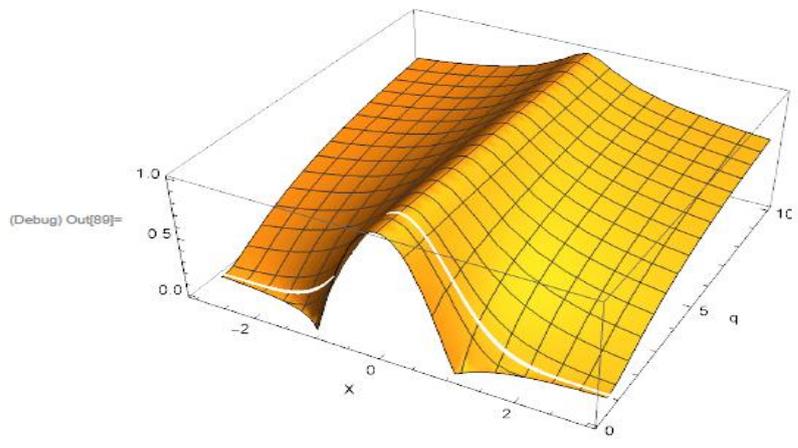
$$P_2(x) = \frac{1}{\Gamma[1 + 2 \alpha]} 4 t^{2\alpha} (1 + (-1 + q) x^2)^{-4+\frac{1}{1-q}} (-1 + 3 x + 2 (1 + 7 q) x^2 - (9 + 2 q) x^3 - q (10 + 9 q) x^4 + (9 - 5 q^2) x^5 + (-2 + 6 q) x^6 + (-3 + 2 q + q^2) x^7 + (-1 + q)^2 x^8)$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{\Gamma[1 + 3 \alpha]} 4 t^{3\alpha} (1 + (-1 + q) x^2)^{-6+\frac{1}{1-q}} (3 + (-7 + 72 q) x - (13 + 144 q) x^2 + (35 + 272 q - 768 q^2) x^3 + 2 (10 + 89 q + 99 q^2) x^4 + 2 (-35 + 5 q - 165 q^2 + 468 q^3) x^5 + 2 (-5 - 42 q - 186 q^2 + 132 q^3) x^6 - 2 (-35 - 9 q + 54 q^2 + 8 q^3 + 72 q^4) x^7 + (-5 + 72 q + 24 q^2 + 14 q^3 - 81 q^4) x^8 + (-35 + 22 q + 22 q^2 + 22 q^3 - 15 q^4) x^9 + (7 - 28 q + 12 q^2 + 8 q^3 + q^4) x^{10} + (-1 + q)^2 (7 + 4 q + q^2) x^{11} + 2 (-1 + q)^3 x^{12})$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

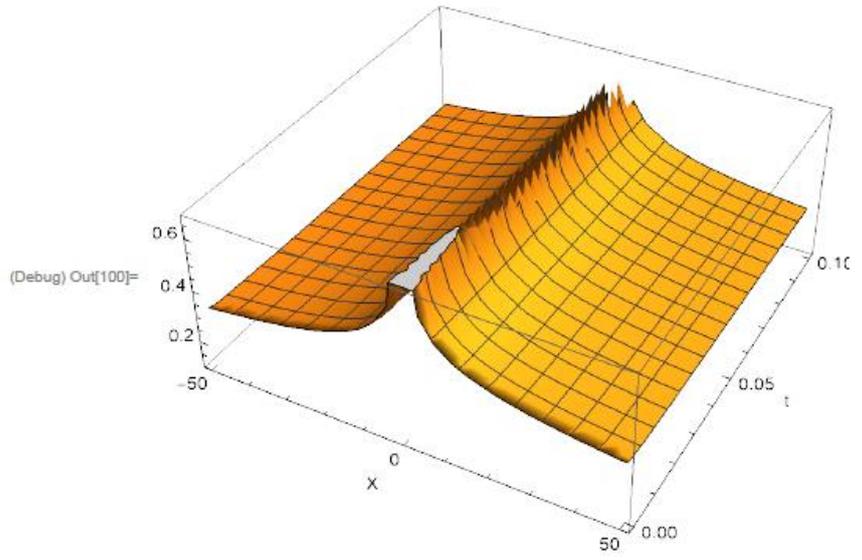
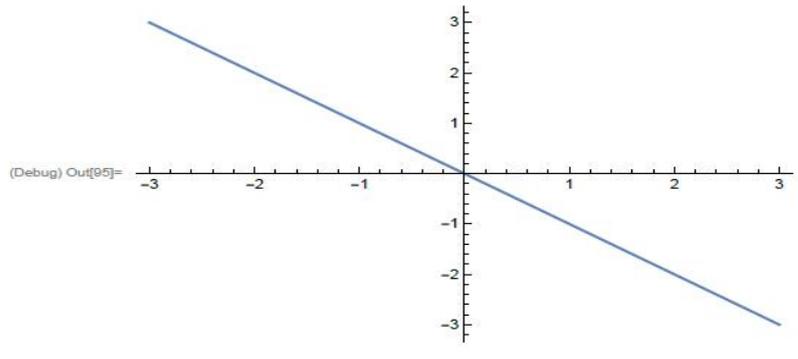
Termo restaurador: $-x$ Termo difusivo: 1

$$P(x) = (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} \left(1 - \frac{2 t^{\alpha} x (-2 + x + 2 x^2 + (-1 + q) x^3)}{(1 + (-1 + q) x^2)^2 \Gamma[1 + \alpha]} + (4 t^{2\alpha} (-1 + 3 x + 2 (1 + 7 q) x^2 - (9 + 2 q) x^3 - q (10 + 9 q) x^4 + (9 - 5 q^2) x^5 + (-2 + 6 q) x^6 + (-3 + 2 q + q^2) x^7 + (-1 + q)^2 x^8)) / ((1 + (-1 + q) x^2)^4 \Gamma[1 + 2 \alpha]) - \frac{1}{(1 + (-1 + q) x^2)^6 \Gamma[1 + 3 \alpha]} 4 t^{3\alpha} (3 + (-7 + 72 q) x - (13 + 144 q) x^2 + (35 + 272 q - 768 q^2) x^3 + 2 (10 + 89 q + 99 q^2) x^4 + 2 (-35 + 5 q - 165 q^2 + 468 q^3) x^5 + 2 (-5 - 42 q - 186 q^2 + 132 q^3) x^6 - 2 (-35 - 9 q + 54 q^2 + 8 q^3 + 72 q^4) x^7 + (-5 + 72 q + 24 q^2 + 14 q^3 - 81 q^4) x^8 + (-35 + 22 q + 22 q^2 + 22 q^3 - 15 q^4) x^9 + (7 - 28 q + 12 q^2 + 8 q^3 + q^4) x^{10} + (-1 + q)^2 (7 + 4 q + q^2) x^{11} + 2 (-1 + q)^3 x^{12}) \right)$$



Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=0.4 Parâmetro Real de Tsallis (q)=10

Termo Restaurador:



* EFP fracionária no tempo com efeito memória de Caputo (α) e condição inicial q-gaussiana (não considerada na análise do trabalho mas com resultados igualmente interessantes).

Termos calculados analiticamente com o método de Adomian:

$$\text{Condição inicial: } (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$P_0(x) = (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$P_1(x) = -\frac{2 t^{\alpha} (1 + (-1 + q) x^2)^{-2 + \frac{1}{1-q}} (1 + (-1 + 3q) x^2)}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

$$P_2(x) = \frac{4 q t^{2\alpha} (1 + (-1 + q) x^2)^{-4 + \frac{1}{1-q}} (-1 + (6 - 10q) x^2 + (3 - 14q + 15q^2) x^4)}{\Gamma[1 + 2\alpha]}$$

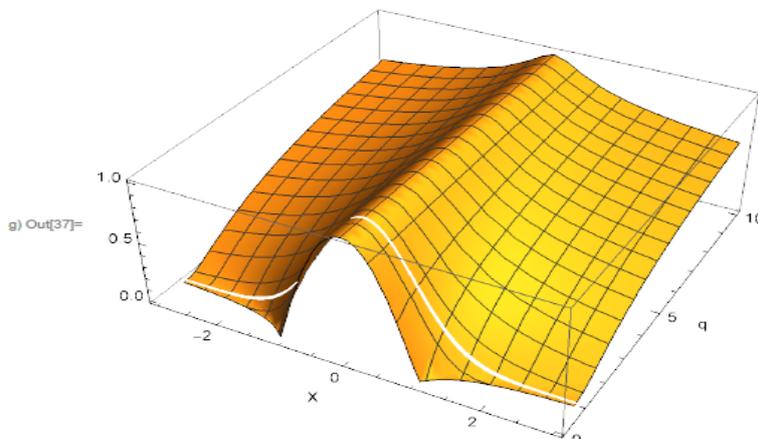
$$P_3(x) = -\frac{1}{\Gamma[1 + 3\alpha]} 8q (-1 + 2q) t^{3\alpha} (1 + (-1 + q) x^2)^{-6 + \frac{1}{1-q}} (3 + 9(-5 + 7q)x^2 - 9(15 - 46q + 35q^2)x^4 + (-15 + 91q - 173q^2 + 105q^3)x^6)$$

Solução da Equação de Fockker-Planck com 3 termos

$$\text{Termo restaurador: } -\frac{1}{x} \quad \text{Termo difusivo: } x$$

$$P(x) = (1 + (-1 + q) x^2)^{\frac{1}{1-q}} \left(1 - \frac{2 t^{\alpha} (1 + (-1 + 3q) x^2)}{(1 + (-1 + q) x^2)^2 \Gamma[1 + \alpha]} + \frac{4 q t^{2\alpha} (-1 + (6 - 10q) x^2 + (3 - 14q + 15q^2) x^4)}{(1 + (-1 + q) x^2)^4 \Gamma[1 + 2\alpha]} - \frac{8 q (-1 + 2q) t^{3\alpha} (3 + 9(-5 + 7q) x^2 - 9(15 - 46q + 35q^2) x^4 + (-15 + 91q - 173q^2 + 105q^3) x^6)}{(1 + (-1 + q) x^2)^6 \Gamma[1 + 3\alpha]} \right)$$

Condição Inicial:



Ordem da Derivada Fracionária (Alpha)=0.4 Parâmetro Real de Tsallis (q)=10