

Sistema FIEB



CENTRO UNIVERSITÁRIO SENAI CIMATEC

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM

COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL

Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

Dissertação de Mestrado

**O Cálculo fracionário: Aspectos históricos e relevância
na modelagem de solução de problemas.**

Apresentada por: José Roberto Dantas da Silva
Orientador: Prof. Dr. Davidson Martins Moreira

Dezembro de 2020

José Roberto Dantas da Silva

O Cálculo fracionário: Aspectos históricos e relevância na modelagem de solução de problemas.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Curso de Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do Centro Universitário SENAI CIMATEC, como requisito obrigatório para a obtenção do título de **Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**.

Área de conhecimento: Interdisciplinar

Orientador: Prof. Dr. Davidson Martins Moreira

Centro Universitário SENAI CIMATEC

Salvador
Centro Universitário SENAI CIMATEC
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Centro Universitário SENAI CIMATEC

S586c Silva, José Roberto Dantas da

O cálculo fracionário: aspectos históricos, filosóficos e relevância na modelagem e solução de problemas / José Roberto Dantas da Silva. – Salvador, 2021.

73 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Davidson Martins Moreira.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial) – Programa de Pós-Graduação, Centro Universitário SENAI CIMATEC, Salvador, 2021. Inclui referências.

1. Cálculo Fracionário. 2. Aspectos históricos. 3. Modelagem matemática. 4. Derivada conformável. I. Centro Universitário SENAI CIMATEC. II. Moreira, Davidson Martins. III. Título.

CDD 510

NDI - 02

Nota sobre o estilo do PPGMCTI

Esta dissertação de mestrado foi elaborada considerando as normas de estilo (i.e. estéticas e estruturais) propostas aprovadas pelo colegiado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial e estão disponíveis em formato eletrônico (*download* na Página Web < http://ead.fieb.org.br/portal_faculdades/dissertacoes-e-teses-mcti.html > ou solicitação via *e-mail* à secretaria do programa) e em formato impresso somente para consulta.

Ressalta-se que o formato proposto considera diversos itens das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), entretanto opta-se, em alguns aspectos, seguir um estilo próprio elaborado e amadurecido pelos professores do programa de pós-graduação supracitado.

Dedicatoria

À família

José Dantas da Silva, meu velho e saudoso PAI, que não pode presenciar este momento.

Esmeralda (minha Mãe ou Mainha) e meus irmãos. Valquíria (ou Kida), esposa,

José Roberto Junior, Anderson, Hudson (filhos) Katty (minha filha Keu),

meus netos (Sophia, Rafael e Maria Helena).

Agradecimentos

À DEUS!

À família, em especial Valquíria (esposa), meus filhos e netos (as). E, especialmente, ao meu Orientador Professor Davidson Martins Moreira, pela paciência e admoestações necessárias para chegasse nesta etapa de minha trajetória formativa.

À Instituição SENAI – CIMATEC, colaboradores e professores ligados direta e indiretamente ao grupo de pesquisa, com os quais tive e terei contatos.

Aos colegas do curso de mestrado.

E, finalmente, ao apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa da Bahia (FAPESB), que concorreu diretamente para a realização desta pesquisa sob orientação de pesquisadores vinculados ao Programa de Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, do Centro Universitário SENAI – CIMATEC, inserido na linha de pesquisa de Sistemas Complexos com abordagem interdisciplinar.

Salvador, Brasil

José Roberto Dantas da Silva

Salvador, 16 de dezembro 2020

Resumo

Este trabalho apresenta uma revisão histórica das contribuições na evolução da teoria do cálculo fracionário e sua aplicação na modelagem para solução de problemas teóricos e empíricos. Além disso, busca trazer formulações clássicas e recentes, inserindo-se no debate atual sobre a nova derivada conformável. Para exemplificar o estado da arte, apresenta-se uma solução analítica da equação de difusão-advecção bidimensional, em um problema de dispersão de poluentes na atmosfera, com a utilização da derivada conformável e o método da decomposição por Laplace (MDL). O problema da inconsistência dimensional introduzido pelas derivadas fracionárias é discutido, apresentando-se uma hipótese para a correção da dimensão ($\phi^{1-\alpha}$) no termo advectivo. Observou-se que a escala de comprimento de Kolmogorov apresentou o melhor desempenho para a correção dimensional através da comparação com os dados experimentais de Copenhague. Ressalta-se que a derivada conformável transforma uma equação fracionária em um problema de ordem inteira, fazendo com o que o efeito de memória, intrínseco as derivadas fracionárias, seja perdido na solução do problema.

Palavras-chaves: Cálculo fracionário; Aspectos históricos; Modelagem matemática; derivada conformável.

Abstract

This research presents a review of contributions to the evolution of fractional calculus theory and its application in modeling to solve theoretical and empirical problems. Besides, it seeks to bring classic and recent formulations, as part of the current debate on the new conformable derivative. To exemplify the state of the art, an analytical solution of the two-dimensional diffusion-advection equation is presented, in a problem of pollutants dispersion in the atmosphere, with the use of the conformable derivative and the Laplace decomposition method (LDM). The problem of dimensional inconsistency introduced by the fractional derivatives is discussed, presenting a hypothesis for the correction of the dimension ($\phi^{1-\alpha}$) in the advective term. It was observed that the Kolmogorov length scale presented the best performance for the dimensional correction by comparing it with the Copenhagen experimental data. It is noteworthy that the conformable derivative transforms a fractional equation into an integer one, causing the memory effect, intrinsic to the fractional derivatives, to be lost in the solution of the problem.

Keywords: Fractional calculus; Historical aspects; Mathematical modeling; Conformable derivative.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	4
1.1.1	Geral	4
1.1.2	Específicos	4
1.2	Aspectos Metodológicos	4
1.3	Organização da pesquisa	5
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Aspectos históricos	7
2.2	Origem do cálculo fracionário	8
2.2.1	Como surgiu o cálculo fracionário?	9
2.2.2	Como conceituar o cálculo fracionário?	13
2.2.2.1	Alguns conceitos de cálculo fracionário	13
2.2.3	Qual a abrangência empírica (e/ou teórica)?	17
2.3	Algumas aplicações do cálculo fracionário	17
2.3.1	Formulações recentes: derivada conformável	24
3	Modelagem com derivadas fracionárias	26
3.1	Preliminares	26
3.2	Notações usuais	26
3.3	Método da decomposição por Laplace (MDL)	27
3.3.1	Solução da equação de difusão-advecção	29
4	Resultados numéricos	38
4.1	Avaliação do desempenho do modelo	38
4.2	Simulações e análise dos resultados obtidos	40
5	Conclusões	50
5.1	Considerações e trabalhos futuros	50
	Referências	51

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros meteorológicos durante o experimento de Copenhagen.	39
4.2	Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = h$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.	42
4.3	Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = 1m$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.	44
4.4	Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = z_0$ m, em relação a variação de α e a velocidade do vento.	46
4.5	Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = \eta$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.	48

Lista de Figuras

2.1	Cálculo fracionário: origem e evolução	7
2.2	Soluções da função $f(t) = t^2$ usando derivada fracionária de Caputo.	16
4.1	Convergência da série no modelo usando o experimento 1 de Copenhagen, considerando a distância da fonte de 100 m para diferentes valores de α ($1, 0, 0,9$ e $0,8$).	41
4.2	Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = h(m)$ e $\alpha = 0,80$	43
4.3	Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = 1m$ e $\alpha = 0,60$	45
4.4	Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = z_0\text{ m}$ e $\alpha = 0,65$	47
4.5	Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = \eta$ e $\alpha = 0,80$	49

Lista de Siglas

CIMATEC ..	Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial;
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação;
FAPESB	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia;
<i>CLP</i>	Camada limite planetária;
<i>CS</i>	Camada Superficial;
MDL	Método da decomposição por Laplace;
\mathcal{L}	Transformada de Laplace;
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace;
T_α	Derivada conformável;
<i>EDA</i>	Equação de difusão-advecção;
<i>EDO</i>	Equação diferencial ordinária;
<i>h</i>	Altura da camada limite (m);
<i>Hs</i>	Altura da fonte (m);
<i>Kx</i>	Coefficiente de difusão turbulenta na direção x (m/s^2);
<i>Ky</i>	Coefficiente de difusão turbulenta na direção y (m/s^2);
<i>Kz</i>	Coefficiente de difusão turbulenta na direção z (m/s^2);
<i>u</i>	Velocidade longitudinal do vento médio;
α	Parâmetro de ordem fracionária;
δ	Função delta de Dirac;
ϕ	Parâmetro de correção dimensional;
<i>c</i>	Concentração média integrada lateralmente (g/m^2);
<i>c_o</i>	Concentração observada experimentalmente (g/m^2);
<i>c_p</i>	Concentração preditada pelo modelo (g/m^2);
<i>U₁₀</i>	Velocidade média do vento medida a 10 m de altura (m/s);
<i>U₁₁₅</i>	Velocidade média do vento medida a 115 m de altura (m/s);
<i>z</i>	Domínio na direção vertical;
<i>U</i>	Velocidade média do vento na direção longitudinal (m/s);
<i>V</i>	Velocidade média do vento na direção transversal (m/s);
<i>W</i>	Velocidade média do vento na direção vertical (m/s);
<i>x</i>	Distância longitudinal da fonte (m);
<i>z₀</i>	Escala de comprimento de rugosidade (m);
η	Escala de Comprimento de Kolmogorov (m);
<i>Q</i>	Intensidade da fonte (g/s);
<i>n</i>	número de termos na série;
<i>u_*</i>	Velocidade de fricção (m/s);
<i>w_*</i>	Escala de velocidade convectiva (m/s);
<i>E_{α}</i>	Função de Mittag Lefler;
Γ	Função Gamma;
<i>exp</i>	Função exponencial;
λ_n	Autovalores;
σ_w	Desvio padrão da velocidade vertical (m/s);
<i>FB</i>	Desvio Fracional;
<i>FS</i>	Desvio Padrão Fracional;
<i>NMSE</i>	Erro quadrático Médio Normalizado;
<i>FAT2</i>	Representa a fração de dados que estão entre $0.5 \leq (C_p/C_o) \leq 2$;
<i>COR</i>	Coefficiente de Correlação.

Introdução

Desde os primórdios, a espécie humana vem desenvolvendo habilidades que resultam em ferramentas para aperfeiçoar métodos que ampliam o conhecimento sobre os fenômenos do espaço natural em que está inserida, potencializando a satisfação de suas necessidades. Combinando-se essas habilidades com a acumulação de novos conhecimentos, aprimora-se técnicas e atinge-se um nível de conhecimento científico, através da comprovação e validação de procedimentos. Assim, é importante considerar “*o conhecimento*” como uma necessidade subjetiva, pois engendra explicações mais adequadas para a dinâmica dos fenômenos que emergem da natureza, partindo-se da observação de periodicidade ou irregularidades desses eventos naturais.

Convém observar que nessa dinâmica teórica e fenomenológica, insere-se a teoria do cálculo, cuja origem remonta aos povos da antiguidade, onde, Arquimedes (287-212 a.C.), na Grécia antiga, desenvolveu e aplicou o método da exaustão na resolução de problemas para determinar áreas, considerado como uma das bases do cálculo integral (*primeiro ramo do cálculo*) [Oliveira \(2010\)](#). É importante ressaltar que em diferentes povos, por mais de 18 séculos, desenvolveram-se e aperfeiçoaram-se técnicas e métodos para aplicação prática do cálculo, sendo todos influenciados direta ou indiretamente pelas formulações teóricas e empíricas de grandes pensadores, ou seja, “*sobre o ombro de gigantes*”.

No século XVII, Sir Isaac Newton (1643-1727), cientista inglês, e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), proeminente polímata alemão, potencializaram essa ferramenta matemática (*denominada de novo cálculo*), aplicando-a para resolver problemas que vão além da geometria associada à definição de área, adentrando por diversos campos da ciência até a atualidade ([OLIVEIRA, 2010](#)).

Nesse contexto histórico, Newton contribuiu para o desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial e integral (*método dos fluxões*) e desenvolveu suas três leis da mecânica clássica reforçando as ideias de que o universo é regido por padrões de regularidade [Cassirer \(1943\)](#) ; [Bassalo \(1996\)](#). O método das tangentes de Newton ou “*método dos fluxões*”, supõe-se como analogia ao movimento dos líquidos, onde variáveis ‘*x*’ e ‘*y*’ (*os fluentes*) representam grandezas que “*fluem*” (*variam*) com o passar do tempo. [Cassirer \(1943\)](#) ; [Bassalo \(1996\)](#).

Nas palavras de Newton:

"[...] chamando de fluxões os aumentos das velocidades dos movimentos, e

de fluentes às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos anos 1665 e 1666) o método dos fluxões que aproveito aqui na quadratura das curvas. Os fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempos iguais, mas são infinitamente pequenos [...]" (BARON; BOS, 1985).

Convém observar que havia uma disputa entre Newton e Leibniz pela primazia do “*novo cálculo*”, cuja metodologia introduziu “*as diferenças infinitesimais*”. Vale destacar que nesse período outros matemáticos contemporâneos atuavam de forma isolada ou em colaboração na apreensão, desenvolvimento e aplicação do novo método, como Fermat, os irmãos Bernoulli e o Marquês de L’Hôpital¹. Oliveira (2010) e Silva (2015). Considera-se que a partir do trabalho de Pierre de Fermat (1601-1665), matemático e cientista francês, em sua formulação para resolver o problema de obtenção dos “*máximos e mínimos de funções especiais*”, houve um impulso no desenvolvimento do cálculo diferencial (*segundo ramo do cálculo*). Além disto, Leibniz algebrizou o problema e introduziu a notação d/dx como “*quociente de quantidades infinitesimais*”, denominando dx e dy como diferenciais, ou seja, a menor das diferenças possíveis em x e y . Oliveira (2010); Silva (2015)

No entanto, a histórica troca de correspondências entre Leibniz e L’Hôpital foram importantes para o surgimento do cálculo fracionário. Afirma-se que numa dessas cartas, o primeiro argumentou sobre uma formulação envolvendo a generalização das derivadas de ordem inteira para uma ordem, inicialmente, arbitrária Bassalo (1996). Em outra carta, datada 30/09/1695, L’Hôpital questionou Leibniz:

“[...] é possível uma derivada de ordem fracionária? E, caso positivo, qual seria o significado para essa derivada de ordem $1/2$ [...]” (OLIVEIRA, 2010).

E, da resposta de Leibniz, veio a célebre afirmação:

“[...] assim, segue-se que $d^{1/2}x = x\sqrt{\frac{dx}{x}}$ como um aparente paradoxo, o qual um dia terá consequências frutíferas [...]” (OLIVEIRA, 2010).

Além disto, Leibniz correspondia-se com diversos interlocutores (*intelectuais*). E numa dessas cartas, dirigindo-se a Johann Bernoulli, mencionou a possibilidade de generalização das derivadas, ou seja, uma derivada com termo de “*ordem geral*” Oliveira (2010). Desse efusivo intercâmbio postal, principalmente entre Leibniz e L’Hôpital, relata-se o surgimento do cálculo fracionário em diversas publicações. Bassalo (1996); Machado,

¹Na literatura encontra-se a grafia do nome como L’Hôspital, na forma antiga e L’Hôpital, na forma atual devido questão linguística

Kiryakova & Mainardi (2010); Machado, Kiryakova & Mainardi (2011); Valério, Machado & Kiryakova (2014); Machado, Mainardi & Kiryakova (2015); Machado (2019).

Os questionamentos e argumentações iniciais ampliaram-se, e em outra carta, tem-se a pergunta: “*pode ‘n’ ser qualquer número: fracionário, irracional ou complexo?*”, postulando-se mudar a denominação de “*cálculo fracionário*” para “*cálculo de ordem não-inteira*”, por ser mais amplo. Barbosa *et al.* (2008); Oliveira (2010). Contudo, o que é cálculo fracionário ou cálculo de ordem não-inteira? Afirma-se, segundo alguns autores, ser a teoria da integração e da derivação de ordem arbitrária (*não necessariamente fracionária*), onde unifica-se e generaliza-se as noções de diferenciação de ordem inteira e integrações múltiplas. Bassalo (1996); Podlubny & El-Sayed (1996); Barbosa *et al.* (2008); Oliveira (2010); Machado, Kiryakova & Mainardi (2011); Valério, Machado & Kiryakova (2014); Machado, Mainardi & Kiryakova (2015).

Em outras publicações, afirma-se ser a generalização do cálculo integral e diferencial que completa a ideia inicial proposta por Newton e Leibniz. Desta forma, mantendo-se a linha de raciocínio inicial, ou seja, as ideias do Marquês de L’Hôpital, utiliza-se a denominação de “*cálculo fracionário*” que é uma nomenclatura já concretizada e notoriamente conhecida, Silva (2015). Em ambas as proposições, salienta-se ser o cálculo fracionário uma ferramenta matemática de alto nível, sendo uma inevitável generalização do cálculo como é conhecido atualmente. Portanto, o cálculo fracionário vem sendo constituído num crescente de preenchimento de lacunas. Principia-se na abordagem da restrição em operar com números inteiros, do cálculo Leibniziano ou Newtoniano, e avança para a possibilidade de realizar operações teóricas em quaisquer ordens de fatores (*L’Hôpital, 1696*), com a aplicação prática de Abel (1823) Oliveira (2010); Machado, Kiryakova & Mainardi (2011).

Desde então, ampliou-se o volume de formulações existentes e o novo desafio passou a ser a generalização do cálculo fracionário. Introduziu-se novas formulações com aplicações específicas e, também, novas lacunas e novos desafios. Além disto, surgiram várias definições de derivada fracionária, onde as mais conhecidas são a de Riemann-Liouville e Caputo, com fragilidades similares no tocantes as regras tradicionais do cálculo. No entanto, mais recentemente, surgiu a derivada conformável Khalil *et al.* (2014), e sua relevância vem sendo demonstrada em aplicações envolvendo várias áreas do conhecimento, sempre envolvendo equações diferenciais lineares e não-lineares. Porém, ainda existem várias discussões em aberto: *a)* a derivada conformável é efetivamente uma derivada fracionária? *b)* como resolver o problema de dimensão que surge no cálculo fracionário?

Nessa ótica, propõe-se nesta dissertação uma revisão de literatura abrangendo os fatos históricos e o estado da arte, além de utilizar-se a derivada conformável em um problema atual, pois sua formulação obedece às propriedades do cálculo tradicional, onde a maioria

das derivadas fracionárias falham, como não atender a regra do produto, quociente e regra da cadeia. Portanto, com o objetivo de fazer uma contextualização histórica e resolver um problema atual, realiza-se uma revisão bibliográfica mais abrangente que a tradicional em publicações, cujos objetos têm aderência com o desenvolvimento teórico do cálculo fracionário. Além disto, aplica-se a derivada conformável na solução da equação de difusão-advecção (*bidimensional e estacionária*) para um problema de dispersão de poluentes atmosféricos.

1.1 *Objetivos*

1.1.1 *Geral*

- Elaborar uma revisão histórica das contribuições na evolução da teoria do cálculo fracionário e sua aplicação na modelagem para solução de problemas teóricos e empíricos, além de apresentar a solução para um problema sobre dispersão atmosférica usando derivada conformável.

1.1.2 *Específicos*

- Investigar a historicidade das contribuições para a evolução da teoria do cálculo fracionário;
- Pesquisar a evolução da aplicabilidade da teoria do cálculo fracionário, evidenciando o estado da arte;
- Utilizar o cálculo fracionário, através da derivada conformável, na solução de um problema de dispersão de poluentes na atmosfera.

1.2 *Aspectos Metodológicos*

Neste trabalho, a necessidade de inserção das questões históricas impõe-se pela característica da pesquisa de revisão de literatura ou bibliográfica, nas quais são investigados elementos que tenham aderência à proposta de trabalho. Contudo, tem-se uma revisão histórica mais aprofundada do que a tradicional e, também, de estado da arte. Além disto, propõe-se utilizar os fundamentos básicos da derivada conformável, discutindo sua aplicabilidade em derivadas fracionárias e sugerindo uma alternativa para resolver o problema de dimensão introduzido em um problema de engenharia clássico, como é o caso da

equação de difusão-advecção. Para obtenção da solução utiliza-se o método da decomposição por Laplace (*MDL*), o qual representa uma solução em série de uma equação linear ou não-linear. Assim, cabe ressaltar que existe uma vasta literatura sobre métodos de solução da equação de difusão-advecção: aproximações numéricas Huebner *et al.* (2001), Rizza *et al.* (2003); semi-analíticas Degrazia, Moreira & Vilhena (2001), Moreira *et al.* (2005) e analíticas Moreira & Tirabassi (2004), Tirabassi & Rizza (1994).

1.3 Organização da pesquisa

Este documento apresenta 5 capítulos e está estruturado na seguinte forma:

- Capítulo 1 – Introdução: fornece a motivação e os objetivos do trabalho;
- Capítulo 2 – Fundamentação Teórica: apresenta a história da produção teórica do cálculo, desvelando a construção dos alicerces daquilo que, atualmente, denomina-se como “cálculo fracionário”, destacando-se as pesquisas publicadas desde o início do século XXI e, em andamento, apresentando contribuições e aplicações históricas e contemporâneas;
- Capítulo 3 – Modelagem com derivadas fracionárias: apresenta-se o método da decomposição por Laplace a ser aplicado na resolução da equação de difusão-advecção bidimensional;
- Capítulo 4 – Resultados numéricos: comenta-se as observações feitas a partir das simulações com a solução obtida, comparando-as com dados do tradicional experimento de Copenhagen;
- Capítulo 5 – Conclusões: compara-se a proposta inicial da pesquisa com os resultados alcançados, sugerindo possíveis temas a serem abordados em futuras pesquisas.

Fundamentação Teórica

As questões científicas históricas e filosóficas imbricam-se desde a antiguidade gerando contestações de mitos. E, da observação de fenômenos naturais, emergem construções empíricas e teóricas que influenciam a descrição de eventos postulando-se “leis” universais (*física, matemática, química etc.*). É importante lembrar que construções teórico-filosóficas conduziram a humanidade ao estado atual de desenvolvimento científico e tecnológico. Ressalta-se o modelo atômico que argumentava sobre a possibilidade de existência de espaços vazios entre os elementos constitutivos de todos os corpos, sendo estes “átomos” (*não divisível*), de diferentes tamanhos com Demócrito e Leucipo; o debate sobre a possibilidade da existência do vazio (*vácuo*) ou algo (*algum ser*) existir ou não existir nesse vazio, e credita-se à Aristóteles afirmar a impossibilidade de haver espaço vazio, asseverando que a natureza sempre age de forma contrária a tornar possível a existência do vazio (*vácuo*). [Filho \(2008\)](#).

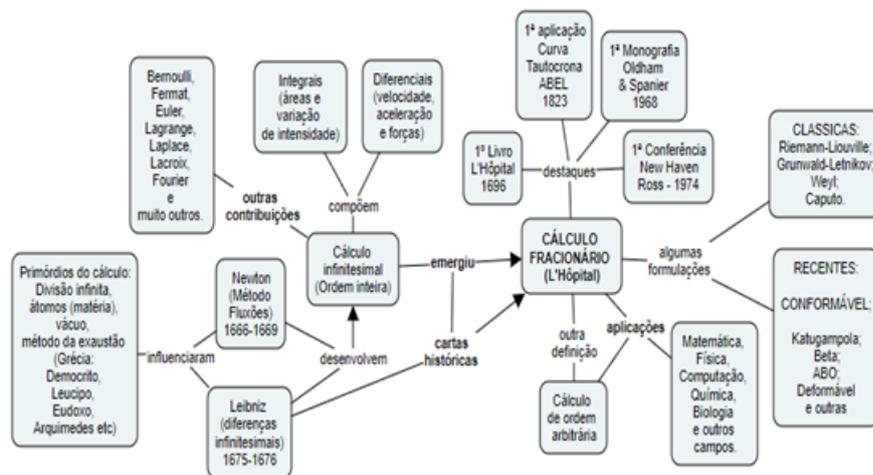
Segue-se com Torricelli, argumentando contrariamente à assertiva Aristotélica, com seu experimento da coluna de mercúrio, impulsionando os estudos sobre a possibilidade da existência de espaços vazios e suas propriedades; Newton, reafirmando os pressupostos do universo regido por padrões de regularidade e a unicidade da criação; Leibniz, afirmando o aparente movimento do objeto em relação ao outro objeto, também argumentava sobre a “*substância individual*”, cujo aperfeiçoamento teórico evolui para “*as monadas*” que tem relação com a percepção e composição dos corpos. [Silva & Piauú \(2010\)](#); [Piauí \(2010\)](#).

É importante ressaltar-se que o pensamento filosófico influenciou a construção de pressupostos que conduziram à descrição de fenômenos naturais observados pelos cientistas em épocas distintas. Cita-se, algumas concepções, de forma breve, pois este trabalho não pretende elaborar um tratado filosófico, mas sim evidenciar relações que porventura existam no desenvolvimento da teoria do cálculo fracionário e o pensamento filosófico. Nessa perspectiva, também, insere-se as disputas entre Newton e Leibniz pela primazia da invenção do cálculo infinitesimal (*ou cálculo de ordem inteira*) e, entre L'Hôpital e Bernoulli, pela criação ou elaboração da regra de indeterminação do tipo $0/0$ do primeiro livro sobre o cálculo fracionário. [Oliveira \(2010\)](#).

Assim, passa-se a descrever alguns conceitos e situações históricas peculiares que acompanham o surgimento do cálculo fracionário, tecendo comentários pertinentes ao desenvolvimento teóricos dessa parte da matemática que vem ampliando sua aplicação prática desde a Antiguidade. Neste sentido, na Figura 2.1 mostra-se em forma de fluxograma, personagens e formulações que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que o cál-

culo fracionário atingisse o status atual. Entretanto, pela exiguidade do espaço, não há como citar (*e honrar*) as necessárias inclusões de outros importantíssimos autores que de forma brilhante alicerçaram (*e outros atuais que ainda alicerçam*) a construção do cálculo fracionário.

Figura 2.1: Cálculo fracionário: origem e evolução



Fonte: Produto da pesquisa

2.1 Aspectos históricos

Inicialmente, rememorando o contexto da introdução, surgem os questionamentos: para que serve o cálculo (*diferencial e integral*)? Onde é aplicado o cálculo (*diferencial e integral*)? De forma genérica, pode-se responder que o cálculo é uma ferramenta matemática adequada à aplicação em qualquer fenômeno onde ocorram variações de movimento (*crecimento ou decrescimento*) e haja variação das forças atuantes que corroborem para produzir aceleração. [Oliveira \(2010\)](#); [Silva \(2015\)](#).

As proposições iniciais sobre o surgimento do cálculo trouxeram duas correntes: os que defendem o “cálculo Newtoniano” (com base no “método dos fluxões”) e o “cálculo Leibniziano” (diferenças entre valores infinitamente pequenos). Isto gerou uma disputa com debates acalorados (*entre defensores e críticos de ambos os lados*) sobre qual dos autores possuía a primazia do novo cálculo, ou a paternidade: o Sir Isaac Newton (1643-1726), da Inglaterra, ou Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), da Alemanha. A disputa só acabou em 1727 com a morte de Newton. Cabe destacar que as descobertas de Newton ocorreram entre 1666 e 1669, e que ele escreveu dois livros por volta de 1671. Entretanto, não publicou suas obras, e por temor das críticas só divulgou o conteúdo para um grupo restrito de colegas, os quais foram publicados em 1704 e 1736, respectivamente, nove anos depois de sua morte [Oliveira \(2010\)](#); [Khamara \(2013\)](#) e [Silva \(2015\)](#). Se por um lado

argumenta-se em favor de Newton, só por volta de 1675 e 1676, ou seja, seis anos depois dele, Leibniz descobriu o cálculo ao fim de uma temporada em Paris. Por outro lado, em favor de Leibniz, argumenta-se que suas descobertas e conclusões foram publicadas entre 1684 e 1686, portanto, antes de Newton. Contudo, concluiu-se por creditar a ambos a autoria do cálculo baseado nas argumentações, conceitualmente distintas, utilizadas nas versões de ambos os autores. E, atualmente, seus conceitos fundamentais são um pouco diferentes dos nossos [Oldham & Spanier \(1974\)](#); [Miller & Ross \(1993\)](#); [Bassalo \(1996\)](#) e [Khamara \(2013\)](#).

O cálculo de ordem inteira tendo sido, inicialmente, uma seara de Newton e Leibniz, e que passa a ter coadjuvantes como os irmãos Bernoulli e, posteriormente, o Marquês L'Hôpital, um novo pesquisador que, assim como os demais, também apresentou a solução do desafio do “*braquistócrona*”, na Acta Eruditorum ¹, [Oldham & Spanier \(1974\)](#); [Miller & Ross \(1993\)](#); [Bassalo \(1996\)](#); [Podlubny & El-Sayed \(1996\)](#); [Barbosa et al. \(2008\)](#); [Oliveira \(2010\)](#) e [Ramos & Camargo \(2012\)](#). Daquela época, destaca-se um fato curioso de não haver textos ou livros publicados que tivessem como conteúdo o cálculo fracionário. Além disso, esse conhecimento era quase que restrito à Newton, Leibniz e dois dos irmãos Bernoulli. E, também, eram eles que conseguiam resolver os desafios com maior grau de dificuldade que eram propostos aos pesquisadores. Entretanto, o crédito por ter escrito a primeira obra contendo os princípios e a maneira como aplicar a metodologia sobre o cálculo fracionário é dado à L'Hôpital. [Miller & Ross \(1993\)](#); [Bassalo \(1996\)](#) e [Podlubny & El-Sayed \(1996\)](#).

Assim, conforme afirmado na introdução, o cálculo fracionário desenvolveu-se, historicamente, estando L'Hôpital participando das discussões sobre esse novo “*cálculo Leibniziano*”, a partir da troca de correspondências entre o Marquês e Leibniz, por volta de 1695. Nessas correspondências, L'Hôpital fez considerações sobre as derivadas e questionava se tem significado para derivada de ordem fracionária (*ordem 1/2*). [Bassalo \(1996\)](#); [Camargo \(2009\)](#) e [Ramos & Camargo \(2012\)](#).

2.2 Origem do cálculo fracionário

Analisando-se a literatura disponível, remontando mais de vinte e cinco séculos, pode-se afirmar que o cálculo fracionário tem o início no cálculo inteiro que, por sua vez, vem de observações e construções teóricas de povos da Antiguidade, [Bassalo \(1996\)](#). Logo, cabe desvelar alguns pontos sobre:

1. Como surgiu o cálculo fracionário?

¹Periódico científico mensal alemã entre 1682 e 1782

2. Como conceituar o cálculo fracionário?
3. Qual a abrangência empírica (e/ou teórica)?

2.2.1 Como surgiu o cálculo fracionário?

Tendo emergido no contexto do novo “*cálculo Leibniziano*”, o cálculo fracionário também trouxe controvérsias sobre a autoria das descobertas e conclusões contidas no livro “*Analysis des Infiniment Petits Pour l’intelligence des lignes courbes*”, publicado em 1696, creditado ao Marquês de L’Hôpital. [Oldham & Spanier \(1974\)](#); [Miller & Ross \(1993\)](#); [Bas-salo \(1996\)](#) e [Machado \(2019\)](#).

No meio desse novo imbróglio, há uma correspondência, datada de 17 março de 1694, entre o Marquês e Bernoulli, onde o primeiro propunha um contrato de serviços remunerados para ensiná-lo de forma a ampliar seus conhecimentos sobre o “*cálculo Leibniziano*”, além de autorização para utilizar o material discutido nas aulas em trabalhos futuros [Solaeche \(1993\)](#) e [Barbosa et al. \(2008\)](#). Abaixo a correspondência.

"Darei a você com prazer uma pensão de trezentas libras, que começará a primeiro de janeiro do presente ano, e lhe enviarei duzentas libras pela primeira metade do ano devido às revistas que você me enviou e cento e cinquenta libras pela segunda metade do ano, e assim seguirá no futuro. Eu prometo aumentar esta pensão sem demora, pois sei que é muito modesta, e farei isto tão logo meus negócios estiverem um pouco menos confusos [...] Não tenho a insensatez de lhe pedir todo o seu tempo, mas solicitarei a você que me dê ocasionalmente algumas horas do seu tempo para trabalhar no que eu pedir – e também me comunicar de suas descobertas, com o pedido de não mencioná-las a outros. Eu também pediria para não enviar nem ao M. Varignon cópias das notas que você me permita ter, pois não me contentaria se ele as tornasse públicas. Envie-me sua resposta a tudo isso e acredite em mim, Monsieur tout à vous. Le M. de L’Hôpital" (tradução livre e grifos deste trabalho, ([BARBOSA et al., 2008](#))).

O fato curioso é que não há uma carta de Johan Bernoulli concordando com as condições. E, noutra carta dentre as inúmeras, em setembro 1693, L’Hôpital faz as seguintes considerações sobre a resolução de uma equação:

“Eu admito que tenho sido muito diligente em resolver a equação $y = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{ax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, quando $x = a$, porque não vejo o dia de ter sucesso mesmo

que nem todas as soluções que aparecem em abundância são exatas.” (tradução livre e grifos deste trabalho, (BARBOSA *et al.*, 2008)).

A solução é comentada por Bernoulli, em 22 de julho de 1694, na carta de número 28, onde faz a demonstração geométrica da indeterminação $0/0$ com dois exemplos, sendo que um deles é usado por L'Hôpital, e o segundo é $y = \frac{a\sqrt{ax-x^2}}{a-\sqrt{ax}}$. A carta inicia-se afirmando:

“[...] *you will find in this paper the solution of this enigma given by Sr. Viviani, but it is exactly the same problem that you would have proposed in Paris. Finally, I have a way of solving the problem of the curves described by these points which means solving this type of equations* $y = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{ax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, *when* $x = a$. *I am content, after having taken care to read everything to explain clearly*”. (tradução livre e grifos deste trabalho, (BARBOSA *et al.*, 2008)).

Nessa correspondência regular, mantida com o Marquês, discutia-se sobre o cálculo fracionário e até questões pessoais, como o incômodo gerado pelo fiel cumprimento das condições do acordo para a prestação dos serviços nas atividades como docente:

[...] *"I am assuming a thing that leaves me very embarrassed; I promised the lord that I would not share my discoveries with anyone, but I advise to talk about our agreement to Sr. Leibniz, if he asks. In truth, it would be very dishonest to lie to a man to whom I am very grateful. However, I think that to keep the promise I made, the best would be to talk to Leibniz about the differential and integral calculus, and that is what my brother, and perhaps others already know; just like him, but in that respect to the things that have been discussed between you and him, in particular, the discoveries made by him, I will respect, in the future, with your permission, I promise you, excellent lord, to keep always in secret. I have given previous proofs, that I always refused to give any kind of help to the lord Varignon about calculus using false pretexts, he has asked me many times, but in reality, I would have obligations to help him, because he has given me many services. Do not have any doubt, that after I ask for secrecy, I kept my promise forever. To get other works just write to me. My humble respects to you and my wife. Lord, Your humble servant Bernoulli.*" (tradução livre e grifos deste trabalho, (BARBOSA *et al.*, 2008)).

O texto da correspondência acima mostra Bernoulli satisfeito com suas atividades, demonstrando fidelidade e disponibilidade para ampliar seus serviços (*não cabe argumentações sobre características de personalidade supostamente identificáveis no texto*). Contudo, com a publicação do livro “*Análise dos Infinitamente Pequenos para o Estudo de Linhas Curvas*”, o Marquês encaminha-lhe uma cópia e, elegantemente, ele agradece a menção de seu nome no livro e promete devolver a deferência em momento oportuno e tecer elogios sobre a forma de apresentação das proposições. E, há um reconhecimento público escrito por L’Hôpital, no prefácio, em que ele afirma ser “impossível a consecução” da obra sem as informações de Bernoulli e os esclarecimentos de Leibniz referente as propriedades do novo cálculo, Solaeche (1993); Abellán (2006) e Barbosa *et al.* (2008). E, ainda, na correspondência datada 22 julho 1694, Bernoulli não responde afirmativamente, nem nega ou repudia a proposta da L’Hôpital, porém comenta suas dificuldades financeiras, potencializadas por estar recém-casado e desempregado, silenciando sobre a resposta solicitada pelo Marquês. Nessa mesma carta, Bernoulli encaminha a demonstração para regra da indeterminação $0/0$. (BARBOSA *et al.*, 2008).

Assim, a correspondência entre ambos aumenta e, em 1695, L’Hôpital encaminha para análise de Bernoulli suas anotações de um trabalho sobre “*as cônicas*” e algumas considerações sobre o “*Cálculo Diferencial*”, renovando sua promessa e intenção em fazer justiça a “*seu professor Johann Bernoulli*”. Noutra carta, em 1698, desta vez dirigida à Leibniz, Bernoulli reclama que o Marquês havia plagiado suas lições de cálculo e, também, escreve para Taylor, sobre o mesmo tema, afirmando “*Senhores exponho em público que a regra que aparece no artigo 163, seção IX, do Analyse (Regra de L’Hôpital) na realidade é descoberta minha*”, Miller & Ross (1993); Bassalo (1996) e Abellán (2006).

A disputa pela “*paternidade do cálculo fracionário*” é levantada por Johann Bernoulli, após a morte de L’Hôpital em 1704, que passa a fazer diversas declarações em público, principalmente com relação a *REGRA DE L’HÔPITAL*. Ele por muito tempo sustentou o argumento que seus manuscritos originais foram utilizados indevidamente, ou seja, sem sua autorização. Entretanto, as alegações de Johann logo foram esquecidas, pois ele tinha um temperamento forte mantendo rivalidades com seu irmão Jacob Bernoulli, com seu próprio filho Daniel e havia participado ativamente da disputa entre Newton e Leibniz, em favor do último. E por outro lado, L’Hôpital tinha uma reputação impecável. (Solaeche (1993) e Barbosa *et al.* (2008).

Apesar das disputas pessoais, o desenvolvimento teórico do cálculo fracionário prosseguia, com os principais pesquisadores pioneiros da ciência moderna aperfeiçoando suas proposições e surgindo novas elaborações com os irmãos James Bernoulli (1654-1705) e John (*Johann*) Bernoulli (1667-1748) e L’Hôpital (1661-1704). E, também, com os trabalhos de Newton e Leibniz desenvolvidos e divulgados nas últimas décadas do século XVII e início do século XVIII. Não obstante, diversos outros autores, tais como Euler, Lagrange,

Laplace, Fourier, além de muitos outros autores, tenham contribuído com o desenvolvimento e concretização do que se conhece como a “*Teoria Geral do Cálculo*” (*cálculo inteiro e cálculo fracionário*) (BASSALO, 1996).

Considerando-se esclarecida a controvérsia entre L’Hôpital e Bernoulli, iniciam-se os questionamentos sobre a aplicabilidade do cálculo fracionário. E, concordando com a assertiva de LHôpital (1696) no prefácio de sua obra, supracitada, “*as descobertas só podem ser feitas em uma sucessão ordenada*”, temos no século XVII, os estudos desenvolvidos por Euler e Lagrange envolvendo o cálculo fracionário. Lagrange desenvolveu a “*lei dos expoentes*”, representada pela Equação (2.1) abaixo, que é uma das propriedades mais úteis no cálculo fracionário e cálculo inteiro Miller & Ross (1993); Bassalo (1996) e Abellán (2006), dada por:

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right)y = \left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^{m+n}}\right)y \quad (2.1)$$

Neste momento, cabe destacar que a produção científica sobre o “*cálculo não-inteiro*” só ocorreu de forma mais sistemática no século seguinte através de Laplace, Lacroix e Fourier, sendo que aproximadamente até 1823 não havia aplicação específica do “*cálculo fracionário*” em qualquer campo do conhecimento humano. Em 1823, Niels Henrik Abel, matemático de origem norueguesa, resolveu a equação da integral fracionária da “*tautócrona*”, utilizando cálculo fracionário, onde aparece uma integral de ordem meio (1/2), Bassalo (1996); Podlubny & El-Sayed (1996); Machado, Kiryakova & Mainardi (2010) e Machado, Kiryakova & Mainardi (2011). Então, a partir dessa aplicação direta, houve um novo impulso nas pesquisas sobre aplicação do cálculo fracionário, emergindo novas definições para derivadas e integrais fracionárias pelas décadas seguintes. Contudo havia contradições nos resultados apresentados. E, já no século XIX, Liouville apresenta uma definição que foi reformulada por Riemann e é conhecida como a derivada (*e integral*) de Riemann-Liouville, Machado, Kiryakova & Mainardi (2011); Ramos & Camargo (2012); Valério, Machado & Kiryakova (2014) e Machado (2019).

Em fins do século XIX e início do século XX, há um grande impulso nos trabalhos propostos sobre cálculo fracionário, surgindo grandes pesquisadores como Grünwald, Letnikov, Caputo, Riesz, Weyl e diversos outros que fomentaram as aplicações. Contudo, o maior volume de produções ocorreu a partir da segunda metade do século XX, na década de 70, pois houve um grande crescimento nas aplicações e não se restringiu apenas à matemática, pois passou-se a ser aplicado na Biologia, Eletroquímica, Estatística, Reologia etc. Valério, Machado & Kiryakova (2014); Machado, Mainardi & Kiryakova (2015) e Machado (2019).

Assim, considerando-se de forma genérica e não em sua “*totalidade*”, respondido o primeiro questionamento, avança-se para a segunda questão, trazendo algumas formulações de equações clássicas e outras mais recentes do cálculo tradicional e fracionário.

2.2.2 Como conceituar o cálculo fracionário?

Há uma diversidade de definições para cálculo fracionário [Valério, Machado & Kiryakova \(2014\)](#) e variam em função da abrangência, aplicabilidade e de acordo com as linhas de investigação praticadas [Teodoro *et al.* \(2019\)](#). Eventualmente, algumas definições apresentavam diferentes resultados numa mesma aplicação, ou seja, entravam em contradições com o que se propunha. Entretanto, existem aquelas que são consideradas como as principais definições ou derivadas clássicas (*Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo*). Em função da historicidade de formulação e a caracterização deste trabalho, serão tratadas somente algumas dessas formulações. Contudo, o tema não será aprofundado em longas demonstrações, verificação de propriedades ou critérios de validação das proposições com as derivadas fracionárias, pois estão disponíveis em diversos trabalhos. [Bassalo \(1996\)](#); [Podlubny & El-Sayed \(1996\)](#); [Machado, Mainardi & Kiryakova \(2015\)](#); [Almeida, Guzowska & Odziejewicz \(2016\)](#); [Akkurt, Türkay & Yildirim \(2017\)](#); [Zulfeqarr, Ujlayan & Ahuja \(2017\)](#); [Teodoro *et al.* \(2019\)](#) e [Machado \(2019\)](#).

Prosseguindo, apresenta-se a definição das derivadas conformáveis [Khalil *et al.* \(2014\)](#) ou derivadas compatíveis (*ou ainda, derivadas locais*), segundo [Teodoro, Machado & Oliveira \(2019\)](#). No entanto, tem-se outras definições como as derivadas de Katugampola [Katu-gampola \(2014\)](#), beta-derivada e beta-integral [Atangana \(2016\)](#), derivadas AGO [Almeida, Guzowska & Odziejewicz \(2016\)](#) e derivadas generalizadas [Akkurt, Türkay & Yildirim \(2017\)](#).

2.2.2.1 Alguns conceitos de cálculo fracionário

Em 1867, no século XIX, foram apresentadas por Anton Karl Grünwald e, em 1868, por Aleksey Vasilievich Letnikov, o que viria a ser chamado de equação de Grünwald-Letnikov, que são formulações de grande relevância na solução de problemas numéricos, tomando como base a generalização da diferenciação ordinária de ordem α , [Teodoro, Machado & Oliveira \(2019\)](#). Na aplicação da derivação fracionária pelo método de Grünwald-Letnikov, utiliza-se a definição de derivada do cálculo diferencial clássico. As demonstrações não estão sendo detalhadas e, caso necessário, podem ser acessadas em [Teodoro, Machado & Oliveira \(2019\)](#). A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov de ordem α é definida através do limite de uma série.

Em 1869, na Rússia, foi inicialmente apresentada no manuscrito de Nikolay Sonin, a formulação para derivadas que ficaria amplamente conhecida como as equações de Riemann-Liouville. Sendo que, em sua operacionalização, primeiro faz-se a integração de ordem arbitrária e depois a derivação de ordem inteira. Porém, se for utilizada para resolução de equações diferenciais fracionárias através da transformada de Laplace, não é obtido valores iniciais com derivada inteira, e isso não tem interpretação na física. (Sonin (1869) e Teodoro, Machado & Oliveira (2019)).

Assim, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α , é definida por:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), \alpha = n \end{cases} \quad (2.2)$$

Além disso, essa formulação é feita em termos de integral fracionária sendo que a derivada de uma constante não é sempre nula e a lei dos expoentes não é aceita (*ou não é aplicável*). Alguns pontos importantes:

- a) Não satisfaz $D_t^\alpha(\text{const.}) = 0$ (*derivada da constante*);
- b) Não satisfaz $D_t^\alpha(f.t)$ (*derivada do produto de duas funções*);
- c) Não satisfaz $D_t^\alpha(f/t)$ (*quociente de duas funções*);
- d) Não satisfaz regra da cadeia;
- e) Em geral, $D_t^\alpha D_t^\beta f \neq D_t^{\alpha+\beta} f$.

Cabe salientar uma curiosidade, que pode não ser notada no cálculo inteiro e que no cálculo fracionário fica mais fácil a identificação, pois se fizermos a derivação e depois integração de uma função (*ou vice-versa*), nem sempre é obtido o mesmo resultado. E, de acordo com a teoria do cálculo fracionário, a integração é a inversa da derivação, ou seja, nem sempre é válida essa assertiva. (AVILA, 2010).

Em 1917, Hermann Weyl, apresentou uma nova formação para derivadas fracionárias usando procedimento similar ao da derivada de Riemann-Liouville e, hoje, ela é conhecida como derivada fracionária de Weyl, a qual pode ser considerada um caso particular da derivada de Hilfer. Almeida, Guzowska & Odziejewicz (2016) Teodoro, Machado & Oliveira (2019).

Em 1969, o italiano Michele Caputo, em “*Elasticità e Dissipazione*” apresentou uma formulação construída a partir de lacunas identificadas nas propriedades da definição da

derivada fracionária de Reimann-Liouville, na qual a derivada de ordem arbitrária tem equivalência com a derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária. Sendo que na proposição de Caputo a derivada de ordem arbitrária é a própria integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira, em outras palavras, na derivada fracionária de Caputo, como é amplamente conhecida, ocorre uma inversão na ordem dos operadores. (Machado, Mainardi & Kiryakova (2015); Teodoro, Machado & Oliveira (2019)).

A derivada fracionária de Caputo de ordem α é definida por:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, (n-1 < \alpha < n) \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), n = \alpha \end{cases} \quad (2.3)$$

Algumas propriedades da derivada de Caputo são bastante semelhantes às das derivadas clássicas (*Newton-Leibniz*) e, diferente da derivada de Reimann-Liouville, satisfaz a propriedade da derivada de uma constante, ${}^C D_t^\alpha(\text{const.}) = 0$. (TEODORO; MACHADO; OLIVEIRA, 2019).

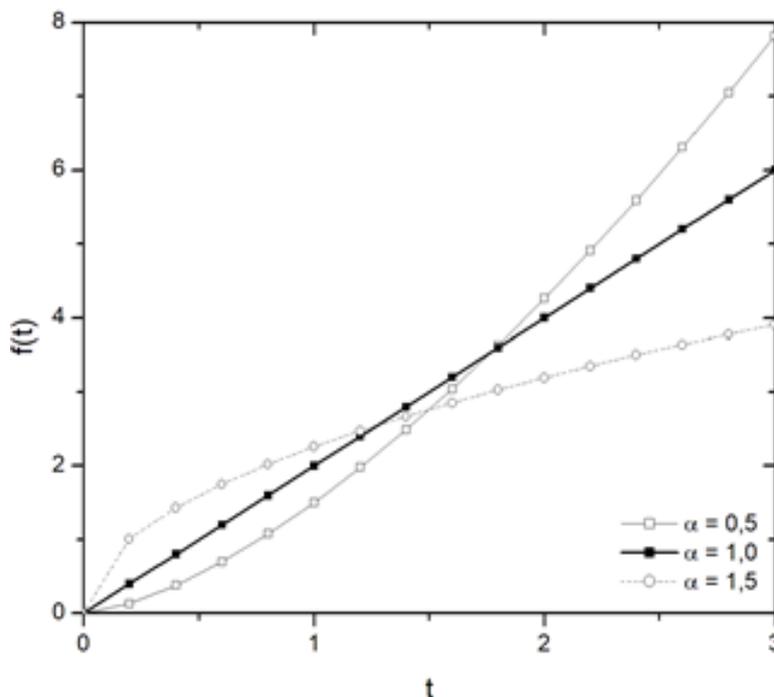
A aplicação concomitante do cálculo inteiro e do cálculo fracionário na resolução de funções polinomiais possibilita observar o comportamento de seus gráficos. Dessa forma, evidencia-se que o cálculo fracionário é uma ferramenta altamente relevante, na reformulação ou formulação da descrição de fenômenos físicos, pois vem sendo percebido que os fenômenos físicos não ocorrem exatamente da maneira prevista nas aplicações de equações diferenciais tradicionais. Assim, como exemplo, tem-se soluções da função $f(t) = t^2$ usando a derivada fracionária de Caputo (Eq. 2.3) para $\alpha = 1/2$, 1 e $\alpha = 3/2$, dadas por:

$${}^C D_t^{1/2} [t^2] = \frac{8}{3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.4)$$

$${}^C D_t^1 [t^2] = 2t \quad (2.5)$$

$${}^C D_t^1 [t^{3/2}] = 4 \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.6)$$

Na Figura 2.2, mostra-se a representação gráfica dessas soluções.

Figura 2.2: Soluções da função $f(t) = t^2$ usando derivada fracionária de Caputo.

Fonte: Produto da pesquisa

A Figura 2.2 mostra a influência da derivada fracionária na determinação das curvas oriundas da solução de $f(t) = t^2$. A equação (2.5) (derivada de ordem inteira), obtida pela formulação de Caputo, mostra resultado descrito por uma reta com coeficiente angular positivo. As equações (2.4) e (2.6), derivadas com ordem fracionária, geraram curvas com comportamento diferente, mostrando a influência direta da derivada fracionária sob a função em análise.

É importante ressaltar que a derivada fracionária de Caputo é a mais utilizada, pois nela a derivada de uma constante é nula (zero), o que não acontece na derivada de Riemann-Liouville. Além disso, na formulação de Caputo, há dependências das condições iniciais dadas pela função, permitindo uma interpretação física mais adequada. E, em Riemann-Liouville, há dependência de condições da integral fracionária que não é interpretável de forma trivial na física. Almeida (2017). Além disso, na aplicação da derivada de Caputo, o procedimento é invertido em relação a Riemann-Liouville, onde primeiro faz-se a derivação de ordem inteira e depois a integração fracionária, sendo que neste processo a derivação da constante tem resultado sempre nulo. (TEODORO; MACHADO; OLIVEIRA, 2019).

Assim, considera-se respondida a segunda questão, após breves considerações sobre algumas das definições de derivadas fracionárias, dando-se mais de ênfase às formulações de Riemann-Liouville e Caputo.

2.2.3 Qual a abrangência empírica (e/ou teórica)?

Inicialmente, nos séculos XVII e XVIII, a teoria do cálculo fracionário desenvolveu-se de forma lenta e basicamente teórica, no campo da matemática. Entretanto, é importante lembrar que com o resultado obtido por Niels Abel, [Ramos & Camargo \(2012\)](#), houve um impulso no desenvolvimento teórico por parte de outros autores, conforme já comentado, e sua aplicabilidade prática passou a ser ampliada a partir do final do século XIX. No século XX, realizam-se workshops, simpósios e conferências internacionais sobre o cálculo fracionário. [Barbosa et al. \(2008\)](#); [Oliveira \(2010\)](#); [Machado, Kiryakova & Mainardi \(2011\)](#) e [Valério, Machado & Kiryakova \(2014\)](#), como exemplo:

- Em 1974, Universidade de New Haven - New Haven (EUA) - 1ª Conferência Internacional sobre Diferenciação Fracionária e suas Aplicações;
- Em 1984, Universidade de Strathclyde - Glasgow (Escócia) - Conferência Internacional sobre Diferenciação Fracionária e suas Aplicações;
- Em 1989, Universidade de Nihon - Tóquio (Japão) - Conferência Internacional;
- Em 2014, Catania (Itália) - Conferência Internacional sobre Diferenciação Fracionária e suas Aplicações;
- Em 2016, Universidade de Novi Sad - Novi Sad (Servia) - Conferência Internacional sobre Diferenciação Fracionária e suas Aplicações;
- Em 2018, Universidade da Jordânia - Aman (Jordânia) - Conferência Internacional sobre Diferenciação Fracionária e suas Aplicações.

Essas conferências contribuíram para divulgação do trabalho de diversos pesquisadores e ampliou o interesse pelas aplicações e o número de pesquisas nessa área. Atualmente há pesquisas e aplicações em diversas áreas do conhecimento, fazendo com que o cálculo fracionário tenha se tornado uma ferramenta matemática, em muitos casos, mais adequada para descrever e representar a solução de fenômenos físicos. [Barbosa et al. \(2008\)](#) [Oliveira \(2010\)](#). Entretanto, ainda existem desafios a serem superados. São lacunas antigas das formulações clássicas e novas lacunas de formulações mais recentes, em que diversos pesquisadores estão desenvolvendo trabalhos na busca de soluções. [Camargo \(2009\)](#); [Ramos & Camargo \(2012\)](#).

2.3 Algumas aplicações do cálculo fracionário

[Gorenflo, Luchko & Mainardi \(2000\)](#) apresentaram soluções para a equação de difusão de ondas em termos da função de Wright.

Laskin (2000) publicou estudo em mecânica quântica com o uso de cálculo fracionário e a teoria do caminho integral de Lévy.

Gorenflo *et al.* (2001) utilizaram o cálculo fracionário para análises de financiamentos com equações de tempo contínuo.

Podlubny (2002) apresentou uma possível interpretação geométrica e física para integrais e derivadas fracionárias.

Lenzi *et al.* (2003) apresentaram discussão sobre a difusão anômala a partir de uma equação diferencial não-linear fracionária.

Machado & Jesus (2004), com “Suggestion from the past?”, propuseram uma nova análise no ponto de vista do cálculo fracionário abordando as equações diferenciais parciais que modelam as linhas de transmissão elétrica para utilizar em projeto para circuitos integrados que implementem impedâncias diretamente de ordem fracionária para explorar geometrias fractais e propriedades dielétricas.

Berberan-Santos (2005) publicou inversão analítica da transformada de Laplace sem integração das condições de contorno.

Novikov *et al.* (2005) discutiram o relaxamento anômalo em dietéticos com a utilização de equações com derivadas fracionárias.

Heymans & Podlubny (2006) propuseram uma interpretação das condições iniciais para um problema com derivadas fracionárias dadas no sentido de Riemann-Liouville.

Sabatier, Agrawal & Machado (2007) apresentou uma compilação de estudos sobre sistemas fracionários e da aplicação da diferenciação fracionária, trazendo o estado da arte no período de abrangência da obra.

Lundberg, Miller & Trumper (2007) publicaram uma discussão sobre o problema das condições iniciais envolvendo funções generalizadas e metodologias de transformação integral.

Mainardi & Gorenflo (2008) publicaram uma pesquisa envolvendo derivados fracionários no tempo em processos de relaxamento.

Rida, El-Sherbiny & Arafa (2008) discutiram a equação não linear de Schrödinger.

Kiryakova (2008) publicou um texto sobre a contribuição de Kalla para o cálculo fracionário generalizado, destacando que Kalla foi pioneiro na utilização da função Fox H no

núcleo de um operador fracionário.

Castillo-Negrete (2009) apresentou a discussão de uma propagação frontal super difusiva com voos de Lévy.

Gutierrez, Rosario & Machado (2010) discutiram conceitos básicos de cálculo fracionário com aplicação em engenharia.

Machado, Kiryakova & Mainardi (2010) descrevem historicamente a promoção e desenvolvimento pelos principais cientistas do cálculo fracionário ao longo do tempo.

Katugampola (2011) introduziu uma nova integral fracionária.

Tarasov (2013) apresentou demonstrações que a regra de Leibniz tem aplicação para a ordem um e não é aplicável para derivada fracionária, ou seja, não se aplica em ordem diferente de um.

Valério *et al.* (2013) apresentam o trabalho realizado através do levantamento de fórmulas úteis disponíveis em cálculo fracionário.

Luchko (2013) discutiu a equação fracionária Schrödinger para uma partícula movendo-se em um poço em potencial.

Perdikaris & Karniadakis (2014) propuseram uma equação de viscoelasticidade de ordem fracionária em modelos unidimensionais para fluxo sanguíneo.

Valério, Machado & Kiryakova (2014) publicaram o artigo “Alguns pioneiros das aplicações do cálculo fracionário”.

Khalil *et al.* (2014) introduziram uma nova formulação denominada derivada fracionária conformável.

Valério, Machado & Kiryakova (2014) publicaram um artigo apresentando alguns pioneiros das aplicações do cálculo fracionário.

Rogosin & Mainardi (2014) publicaram um artigo em que discutiram o pioneirismo de Scott Blair no uso do cálculo fracionário em reologia.

Abdeljawad (2015) propôs o cálculo fracionário conformável e discutiu versões fracionárias para a regra da cadeia e integração por partes, entre outros assuntos.

Camargo & Capelas (2015) publicaram o primeiro livro sobre Cálculo Fracionário escrito em português.

Ortigueira & Machado (2015) discutiram conceitos de formulação dos operadores que possuem características para interpretação como derivadas ou integrais fracionárias, propondo e submetendo-os aos critérios das derivadas fracionárias de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo para validação como operadores fracionários, além de trazer uma regra de Leibniz para a potência de Riesz.

Tarasov (2016) publicou um artigo fazendo considerações para uma derivada ser considerada fracionária.

Iyiola & Nwaeze (2016) discutiram alguns resultados para equações fracionárias conformáveis.

Atangana (2016) introduziu uma derivada fracionária com um valor não-local e kernel não singular.

Almeida (2017) publicou artigo no qual discute as propriedades derivada fracionária no sentido de Caputo de uma função em relação a outra função.

Machado & Kiryakova (2017) publicaram um interessante levantamento histórico sobre cálculo fracionário.

Yang & Machado (2017) propuseram uma nova derivada fracionária sem núcleo singular com potencial para aplicação na modelagem do problema da constante de condução do calor como uma alternativa à solução analítica do fluxo de calor de ordem fracionária.

Zhao & Luo (2017) introduziram uma derivada fracionária conformável geral e sua interpretação física.

Biswas *et al.* (2017a) discutem a elaboração de dispositivos com aplicação empírica, pragmática e abrangente, ou seja, um dispositivo de ordem fracionária dinâmico que possibilite uma adequação em tempo real. Como exemplo, comentam a possibilidade de generalização da “lei de Ohm” para dispositivos de memória não linear e, como instrumento motivador, propõe a inclusão no ensino secundário das análises de ordem fracionária.

Sheikh *et al.* (2017) discutiram os prós e os contras das versões fracionárias, conforme introduzido por Atangana-Baleanu e Caputo-Fabrizio.

Yan, Sun & Zhang (2017) publicaram a proposta de um método numérico para discutir

equações diferenciais de segunda ordem com derivadas do tipo Caputo.

[Kaplan & Bekir \(2017\)](#) apresentaram a construção de soluções exatas no espaço e no tempo para equações diferenciais fracionárias.

[Biswas *et al.* \(2017b\)](#) apresentam conceito de um dispositivo de ordem fracionária e suas possibilidades de utilização em circuitos de controle eletrônico levantando uma discussão motivadora para o desenvolvimentos desses “elementos de ordem fracionária” e “dispositivos de ordem fracionária”, explorando as questões “por que lei de potência?” e “como utilizá-las?”, além de uma breve exposição de aplicações do cálculo fracionário na engenharia de materiais.

[Neirameh \(2017\)](#) utilizou o método da sub-equação (soluções exatas de ondas) que se baseia no princípio de equilíbrio homogêneo e na derivada de Jumarie modificada de ordem fracionária, obtendo uma solução exata da equação de Schrödinger não-linear e perturbada com a não-linearidade da lei de potência.

[Yang & Machado \(2017\)](#) publicaram a discussão de difusão anômala usando um novo operador fracionário de ordem variável.

[Machado & Kiryakova \(2017\)](#) fizeram um trabalho revisional detalhando publicações e conferências sobre cálculo fracionário, em comemoração existência da revista *Fractional Calculus and Applied Analysis*, em alusão aos 20 anos.

[Moreira & Moret \(2018\)](#) propuseram uma solução analítica para a equação fracionária de difusão-advecção no estado estacionário, a partir do método GILTT modificado.

[Sun *et al.* \(2018\)](#) publicaram uma coletânea de aplicações do cálculo fracionário em ciências e engenharia.

[Sousa & Oliveira \(2018\)](#) apresentaram proposta da derivada -Hilfer contendo mais de vinte formulações distintas de derivadas fracionárias como casos particulares.

[Kaplan & Akbulut \(2018\)](#) apresentaram uma discussão da equação da onda utilizando a derivada fracionária conformável.

[Rogosin & Dubatovskaya \(2018\)](#) publicaram pesquisa analisando as formulações propostas por Letnikov e Marchaud.

[Liang *et al.* \(2018\)](#) propuseram um modelo para difusão anômala com base nas funções de Mittag-Leffler e Wiman.

Agarwal & El-Sayed (2018) introduziram metodologia que utiliza o método de Chebyshev e no método das diferenças finitas não padronizadas para resolver equações fracionárias de difusão em termos da derivada de Caputo.

Xavier, Soledade & Moreira (2018) apresentaram uma solução analítica da equação bidimensional de advecção-difusão de ordem fracionária, no sentido de Caputo, aplicando-a à dispersão de poluentes atmosféricos, sendo obtida solução com os métodos de decomposição de Laplace e perturbação da homotopia.

Oliveira & Oliveira (2018a) propuseram uma formulação para derivada fracionária dependente de dois parâmetros.

Oliveira & Oliveira (2018b) propuseram uma generalização da derivada de Hadamard utilizando a integral de Katugampola.

Yang *et al.* (2018) introduziram uma metodologia para resolver equações diferenciais não lineares fracionárias, expressas por uma derivada local.

Cuahutenango-Barro, Taneco-Hernández & Gómez-Aguilar (2018) discutiram a equação fracionária da onda de tempo nos termos da derivada de Atangana-Baleanu.

Andrade, Lima & Dartora (2018) apresentaram uma introdução à aplicação do cálculo fracionário em circuitos elétricos.

Ibrahim, Hasan & Jalab (2018) propõe-se uma nova função fracionária de Wright (FWF) como uma técnica de minimização de energia que melhorou o desempenho do método de contorno ativo sem aresta, minimizando a utilização da função energética do que o método gradiente-decente usado no método original tridimensional.

Sohail *et al.* (2018) apresentaram o papel relevante do cálculo no tratamento de dados para geração de imagem, subcampo da engenharia biomédica, que é uma ferramenta de diagnóstico importante no aprimoramento dos contextos clínicos, utilizando o auxílio de exemplos práticos.

Tang *et al.* (2018) demonstraram o valor clínico de um modelo de difusão não-Gaussiano usando cálculo de ordem fracionária para predição precoce da resposta do tumor estomacal gastrointestinal à terapia direcionada ao sunitinibe de segunda linha.

Matlob & Jamali (2019) apresentaram uma revisão bibliográfica de publicações envolvendo aplicação de modelos de ordem fracionárias em fenômenos de viscoelasticidade na bioengenharia.

Teodoro, Machado & Oliveira (2019) realizaram revisão bibliográfica, focada em operadores utilizados em cálculo fracionário, utilizando os critérios de classificação de Ross (1975) e de Ortigueira e Machado (2015), para os casos dos operadores de ordem fixa e a ordem de α é um número real.

Moreira *et al.* (2019) propuseram uma solução em série analítica de uma equação tri-dimensional de advecção-difusão de ordem fracionária, no sentido Caputo, aplicada à dispersão de poluentes atmosféricos e usando a técnica de transformação integral generalizada (GITT), para resolver o problema transformada pelo método de decomposição de Laplace (LDM).

Morales-Delgado, Gómez-Aguilar & Taneco-Hernández (2019) obtiveram soluções analíticas para as equações de difusão tempo-fracionária e convecção-difusão tempo-fracionária.

Machado (2019) sugeriu uma interpretação da derivada fracionária através do conceito de probabilidade.

Machado (2019) discutiu conceitos fundamentais do cálculo fracionários, focando as probabilidades negativas e testam, por analogia em duas áreas da matemática, vários experimentos numéricos com perspectivas para novas sinergias e novas possibilidades de aplicação.

Wang *et al.* (2019) mostraram algumas aplicações do cálculo fracionário na área de saúde, propondo um método de detecção de borda através de uma técnica de seleção de recurso incorporada, onde a seleção de características é baseada no algoritmo de otimização de enxame de partículas darwinianas de ordem fracionária.

Önal *et al.* (2019) trazem uma abordagem matemática para ter a capacidade de analisar e examinar fatores como peso, altura e índice de massa corporal em relação à idade.

Balzotti, D'Ovidio & Loreti (2020) apresentaram o modelo epidêmico fracionário SIS (Susceptível-infectado-suscetível) que é sem imunidade (pode haver reinfeção) com o tamanho da população constante e descrevendo a propagação de vírus humanos.

Patnaik & Semperlotti (2020) propuseram uma solução para estudar a dinâmica de um sistema oscilador não linear com amortecimento, fazendo uso do método de cálculo da média obtendo correspondência próxima entre as soluções de perturbação derivadas e a solução numérica da equação do oscilador.

Yue *et al.* (2020) apresentaram novas soluções para equação de ondas de Kudryashov-Sinelshchikov (KS) aplicando a derivada de Atangana-Baleanu no método Khater modi-

ficado em experimento com bolhas de gás líquido sob condições da termodinâmica.

Patnaik, Hollkamp & Semperlotti (2020) apresentaram uma revisão abrangente do progresso em modelagem científica e em engenharia com base no cálculo fracionário de ordem variável, desenvolvido recentemente, que vem despertando muito interesse na comunidade científica.

Baleanu, Mohammadi & Rezapour (2020) analisaram o modelo da doença da rubéola com o derivado fracionário de Caputo-Fabrizio e obtiveram uma solução matemática do modelo hepático que foi apresentada por um esquema de Adams-Bashforth.

Jr *et al.* (2020) apresentaram investigação sobre a aplicabilidade do cálculo fracionário com modelos populacionais baseados em ODE para melhorar a tomada de decisões em relação à escolha de modelos para prever o crescimento de tumores e subsidiar o tratamento clínico.

Dong, Long & Khastan (2020) apresentaram uma formulação para o problema de controle ideal para uma classe de sistemas diferenciais fracionários com a taxa de variação expressa por derivadas fracionárias fuzzy granular relacionados aos modelos epidêmicos SIR (Susceptível-infectado-recuperado) e SEIR (suscetíveis - expostos - infectados - recuperados).

Enfim, ainda existem muitos trabalhos que não foram mencionados. No entanto, com a relação introduzida aqui percebe-se o recorrente interesse neste tipo de abordagem fracionária em vários campos da ciência.

2.3.1 *Formulações recentes: derivada conformável*

Neste tópico conclui-se a resposta da segunda e terceira questões apresentada no tópico anterior. Destacam-se as chamadas “*formulações recentes*” ou “*derivadas locais*”, conforme Teodoro, Machado & Oliveira (2019). No grupo dessas “*derivadas fracionárias*” estão as derivadas conformáveis que são o estado da arte na aplicação em problemas de derivadas fracionárias.

Em Khalil *et al.* (2014), afirma-se que a única propriedade que todas as definições de derivadas fracionárias satisfazem, inclusive Riemann-Liouville e Caputo, é a “*propriedade da linearidade da derivada fracionária*”. No entanto, as formulações de derivadas fracionárias não satisfazem a maioria das propriedades citadas anteriormente para Riemann-Liouville e Caputo. Assim, propuseram uma nova formulação para derivada fracionária que, a princípio, parece ser uma extensão natural das derivadas usuais e apresenta como vantagem

atender as propriedades tradicionais do cálculo tradicional. (KHALIL *et al.*, 2014).

Adota-se a notação T_α para o operador denominado derivada de uma função f com ordem α ($\alpha \in (0, 1)$), escrita como:

$$T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.7)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- 1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$;
- 2. $T_\alpha(f \cdot g) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$;
- 3. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, para qualquer $p \in \mathbb{R}$;
- 4. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$, com $g \neq 0$;
- 5. $T_\alpha(\lambda) = 0$ para toda função $f(t) = (\lambda)$ (*constante*).

e, se f é diferenciável, então:

$$T_\alpha[f(t)] = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt} \quad (2.8)$$

observa-se prontamente que se $\alpha = 1$, retorna para a derivada tradicional. Sugere-se, como referência o trabalho de Khalil *et al.* (2014) para mais detalhes sobre as demonstrações.

Portanto, este capítulo mostrou as bases e fatores históricos do cálculo fracionário. Isto foi feito de forma mais abrangente que a tradicional, pois levou em conta os aspectos históricos e as recentes publicações envolvendo o estado da arte. Na próxima seção apresenta-se a uma modelagem matemática atual que envolve a derivada conformável aplicada em um problema de dispersão de poluentes atmosféricos.

Modelagem com derivadas fracionárias

3.1 Preliminares

Os modelos de ordem fracionária são uma generalização da clássica modelagem de ordem inteira. Porém, esses modelos também estão em necessidade de técnicas mais gerais, a fim de fornecerem soluções analíticas em forma fechada e/ou estudos qualitativos das soluções. Geralmente, essas técnicas não são suficientes para muitos casos práticos relevantes. Portanto, existe uma demanda substancial por técnicas eficientes para lidar com derivadas fracionárias e integrais e equações envolvendo esses operadores. Desta forma, o objetivo nesta parte preliminar é mostrar as equações básicas para o desenvolvimento do trabalho sem entrar em aspectos particulares de algumas definições, muitas das quais ainda estão em andamento na literatura atual.

Por exemplo, a derivada de Caputo é usada como definição de derivada fracionária pelo fato de levar em conta as condições iniciais do problema físico, algo que a derivada de Riemann-Liouville não leva em conta [Garrappa, Kaslik & Popolizio \(2019\)](#). Geralmente muitas das definições não obedecem às regras do cálculo diferencial e integral já bem estabelecidas no cálculo de ordem inteira, a saber, derivada de uma constante deve ser zero e deve obedecer a regra da cadeia. Isto ainda está em discussão pela comunidade científica.

Assim, o fato de se levar em conta somente no termo advectivo a derivada fracionária na equação de difusão-advectação é, de fato, uma escolha para evitar estes problemas em aberto. Neste sentido, surgiram as derivadas conformáveis [Khalil *et al.* \(2014\)](#), onde alguns destes problemas são de alguma forma eliminados e a equação fracionária pode ser resolvida como se fosse de ordem inteira, ou seja, da forma tradicional.

3.2 Notações usuais

O nome cálculo fracionário é o nome para a teoria de integrais e derivadas de ordem arbitrária, a qual unifica e generaliza as noções de diferenciação e integração de ordem inteira. Assim, é possível considerar a sequência infinita de integrais e derivadas escrita como,

$$\int_{\alpha}^t d\tau_2 \int_{\alpha}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_{\alpha}^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \dots \quad (3.1)$$

A derivada de ordem arbitrária pode ser considerada como uma interpolação desta sequência de operadores, sendo a notação usual dada por:

$${}_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t) \quad (3.2)$$

O nome curto dado para derivadas de ordem arbitrária é “derivada fracionária”. Os subscritos α e t são os dois limites relacionados a operação de diferenciação fracionária. A equação diferencial fracionária é uma equação que contém derivada fracionária; uma equação integral fracionária é uma equação integral que contém uma integral fracionária. Um sistema de ordem fracionária significa um sistema descrito por uma equação diferencial fracionária ou uma equação integral fracionária ou por um sistema de tais equações.

3.3 Método da decomposição por Laplace (MDL)

O método de decomposição por Laplace (muitas vezes chamado de Adomian Decomposition Method, quando usa os polinômios de Adomian) [Adomian \(1994\)](#), pode reduzir a quantidade de trabalho computacional necessário para resolver uma equação diferencial e melhorar a precisão dos resultados. O método LDM permite a solução de equações diferenciais parciais (EDPs) não-lineares e lineares com coeficientes variáveis. Para simplificar, a seguinte equação é tomada como exemplo, a qual é uma equação diferencial parcial de ordem inteira (segunda ordem), não linear e não homogênea:

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t) \quad (3.3)$$

onde $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é um operador linear, N é um operador não linear, $h(x, t)$ é o termo fonte, e as condições iniciais são as seguintes:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad (3.4)$$

No método *LDM*, o primeiro passo é a aplicação, em ambos os lados da *Eq. (3.3)*, da transformada de Laplace (\mathcal{L}) na variável t ($t \rightarrow s$):

$$\mathcal{L}[Lu(x, t)] + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x)] \quad (3.5)$$

aplicando-se as condições iniciais e organizando a expressão, resulta em,

$$\mathcal{L}[Lu(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[h(x, t)] - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Nu(x, t)] \quad (3.6)$$

O segundo passo envolve a representação da solução através de uma série infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.7)$$

onde o operador não linear pode ser escrito como:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.8)$$

onde A_n são os polinômios de Adomian que podem ser calculados pela seguinte expressão:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Usando as Eqs. (3.7) e (3.8) na Eq. (3.6), resulta:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\right] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[h(x, t)] - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\right] - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right] \quad (3.10)$$

Comparando-se ambos os lados da Eq. (3.10),

$$\mathcal{L}[u_0(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[h(x, t)] = K(x, s) \quad (3.11)$$

e

$$\mathcal{L}[u_1(x, t)] = -\frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Ru_0(x, t)] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2}[A_0]\right] \quad (3.12)$$

e

$$\mathcal{L}[u_2(x, t)] = -\frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Ru_1(x, t)] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2}[A_1]\right] \quad (3.13)$$

Em geral, a relação recursiva é dada por,

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(x, t)] = -\frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Ru_n(x, t)] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2}[A_n]\right], n \geq 0 \quad (3.14)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}) nas Equações (3.11-3.14), tem-se as relações:

$$u_0(x, t) = K(x, t) \quad (3.15)$$

então

$$u_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathcal{L}[Ru_n(x, t)] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{s^2}[A_n]\right]\right], n \geq 0 \quad (3.16)$$

onde $K(x, t)$ representa a expressão que surge do termo fonte e das condições iniciais.

3.3.1 Solução da equação de difusão-advecção

A equação de difusão-advecção escrita na forma geral é dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} + V\frac{\partial c}{\partial y} + W\frac{\partial c}{\partial z} = K_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_z\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S \quad (3.17)$$

onde c é a concentração de poluentes; U , V e W são as velocidades médias do vento nas direções longitudinal, transversal e vertical, respectivamente; K_x , K_y e K_z são os coeficientes de difusão nas direções longitudinal, transversal e vertical, respectivamente;

S é um termo fonte/sumidouro. Considerando-se a utilização do sistema de coordenadas Cartesiano, alinha-se o eixo x com a direção da velocidade longitudinal média do vento (U), o eixo y com a direção transversal da velocidade média do vento (V), e o eixo z com a velocidade média do vento em relação a direção vertical (W). Usualmente, todos os parâmetros dependem das variáveis x, y, z e t . Dessa forma, faz-se as seguintes hipóteses simplificativas para obtenção de uma solução analítica:

- i) estado estacionário, $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$;
- ii) as velocidades do vento V e W são nulas ($V = W = 0$);
- iii) o termo advectivo na direção x é muito maior que o termo difusivo na mesma direção, $U \frac{\partial c}{\partial x} \gg K_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, podendo ser desprezado;
- iv) não ocorrem reações químicas, $S = 0$ (equação linear);
- v) no caso em estudo, a velocidade do vento U na direção longitudinal é constante e os termos difusivos são dependentes apenas da variável espacial x , ou seja, $K_z = K_z(x)$;
- vi) derivada fracionária somente no termo advectivo longitudinal, conforme (Moreira *et al.* (2005); Goulart *et al.* (2017)), $U \frac{\partial c}{\partial x} \rightarrow U \frac{\partial^\alpha c}{\partial x^\alpha}$;
- vii) considera-se a concentração integrada lateralmente $c(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x, y, z) dy$;

Assim, com estas simplificações, obtém-se a equação de difusão-advectação bidimensional na forma tradicional (derivadas de ordem inteira), escrita como:

$$U \frac{\partial c(x, z)}{\partial x} = K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z)}{\partial z^2} \quad (3.18)$$

logo, pela hipótese (vi), conforme Moreira *et al.* (2005); Goulart *et al.* (2017), assume-se:

$$U \frac{\partial^\alpha c(x, z)}{\partial x^\alpha} = K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z)}{\partial z^2}, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.19)$$

Este procedimento torna a Eq. (3.19) com um problema de dimensão na derivada fracionária, tal que o lado esquerdo da equação é diferente do lado direito. Logo, para ser consistente dimensionalmente, segue-se a sugestão dada no trabalho de Gómez-Aguilar *et al.* (2016), onde é introduzido um parâmetro auxiliar ($\phi^{1-\alpha}$) Moreira *et al.* (2019),

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{1}{\phi^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \quad (3.20)$$

resultando na equação a ser resolvida neste trabalho dada por:

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha c(x, z)}{\partial x^\alpha} = K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z)}{\partial z^2}, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.21)$$

para $x > 0$, $0 < z < h$, onde h igual a altura da camada limite planetária (*CLP*) e c é a concentração integrada lateralmente.

A fração $\frac{U}{\phi^{1-\alpha}}$, resultante da introdução do parâmetro dimensional dado pela Eq. (3.20), afeta o termo advectivo, aumentando ou diminuindo a intensidade da velocidade do vento. Essa influência do termo $\phi^{1-\alpha}$ na velocidade do vento é relativamente pequena. No entanto, surge a pergunta: qual o valor deste parâmetro? Esta é uma questão a ser investigada neste trabalho.

A forma usual de resolver a Eq. (3.21) é usar o conceito de alguma derivada fracionária, sendo a mais comum a derivada de Caputo [Xavier, Soledade & Moreira \(2018\)](#). No entanto, aqui propõe-se resolvê-la aplicando-se o conceito de derivada conformável, o qual transforma uma equação fracionária em uma equação de ordem inteira, mantendo o parâmetro fracionário na equação, porém perdendo a característica do efeito de memória intrínseco de uma derivada fracionária tradicional. Logo, esta proposta usa uma derivada com caráter local, indicando previamente que o parâmetro desconhecido (ϕ), provavelmente, represente uma escala de comprimento fractal. ([He \(2018\)](#); [Goulart, Lazo & Suarez \(2020\)](#)).

Aplicando-se a derivada conformável dada pela Eq. (2.8), a qual transforma a derivada de ordem fracionária em uma de ordem inteira, na Eq. (3.21), obtém-se,

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} x^{1-\alpha} \frac{\partial c(x, z)}{\partial x} = K_z(x) \frac{\partial^2 c(x, z)}{\partial z^2} \quad (3.22)$$

A parametrização adequada da turbulência é fundamental para a modelagem da dispersão de poluentes na atmosfera. Na parametrização, faz-se uma aproximação do fenômeno real para substituir um termo desconhecido. Assim, neste trabalho, o coeficiente de difusão vertical a ser aplicado na Eq. (3.22) é dependente somente da distância longitudinal da fonte é dado por [Moreira *et al.* \(2019\)](#):

$$K_z(x) = \left(\frac{\sigma_w}{U} \right)^2 U_x = \omega_x \quad (3.23)$$

onde $\omega = \frac{\sigma_w^2}{U}$, sendo σ_w o desvio padrão da velocidade vertical (*dados experimentais*) Arya (1995). Logo, fazendo-se as devidas substituições, resulta:

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} \frac{\partial c(x, z)}{\partial x} = \omega x^\alpha \frac{\partial^2 c(x, z)}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

A Eq. (3.24) sugere uma mudança de variável na seguinte forma Crank (1979) e Moreira *et al.* (2014):

$$X = \int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \quad (3.25)$$

resultando,

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} \frac{\partial c(X, z)}{\partial X} = \omega \frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \quad (3.26)$$

A Eq. (3.26) é a equação a ser resolvida e representa o caso em que a difusão turbulenta e a velocidade do vento são constantes. Para solução desta equação são necessárias as devidas condições de contorno. Assim, a condição usual de fluxo nulo de contaminantes no topo e na superfície do domínio vertical é utilizada, conforme segue:

$$\omega \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \dots em \dots z = h \quad (3.27)$$

e

$$\omega \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \dots em \dots z = 0 \quad (3.28)$$

Considerando-se também a condição de fonte dada por uma taxa de emissão (Q) na altura da fonte (H_s),

$$c(0, z) = \frac{Q}{U} \delta(z - H_s) \quad (3.29)$$

onde tem-se uma aproximação da função delta de Dirac $\delta(\cdot)$, dada por:

$$\delta(z - H_s) = \frac{1}{h} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s)] \right] \quad (3.30)$$

sendo os autovalores,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{h}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

Assim, a condição de fonte expressa pela Eq. (3.29) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$c(0, z) = \frac{Q}{U} \frac{1}{h} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s)] \right] \quad (3.32)$$

A partir desse ponto tem-se as condições necessárias para obter-se a solução da Eq. (3.26). Desta forma, usando-se o método *LDM*, inicialmente aplica-se a transformada de Laplace na Eq. (3.26), na variável X ,

$$\mathcal{L} \left[\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} \frac{\partial c(X, z)}{\partial X} \right] = \mathcal{L} \left[\omega \frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right] \quad (3.33)$$

onde as constantes podem ser reorganizadas,

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} \mathcal{L} \left[\frac{\partial c(X, z)}{\partial X} \right] = \omega \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right] \quad (3.34)$$

logo,

$$\frac{U}{\phi^{1-\alpha}} [s c(s, z) - c(0, z)] = \omega \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right] \quad (3.35)$$

organizando-se a equação,

$$sc(s, z) = c(0, z) + \left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{U} \right) \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right] \quad (3.36)$$

resultando,

$$c(s, z) = \frac{c(0, z)}{s} + \left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us} \right) \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right] \quad (3.37)$$

aplicando-se a inversa de Laplace na Eq. (3.37),

$$\mathcal{L}^{-1}[c(s, z)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c(0, z)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.38)$$

tem-se,

$$c(X, z) = c_0 + \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c(X, z)}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.39)$$

onde $c_0 = c(0, z)$ é dado pela Eq. (3.32) e os demais termos são obtidos pela expressão recursiva,

$$c_{n+1} = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c_n(X, z)}{\partial z^2} \right) \right], n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

Logo, c_1 é dado por,

$$c_1 = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us^2} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c_0(X, z)}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.41)$$

calculando-se a primeira e a segunda derivadas de c_0 ,

$$\frac{\partial}{\partial z} c_0(X, z) = -\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \operatorname{sen}(\lambda_n z) \operatorname{cos}(\lambda_n H_s) \quad (3.42)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} c_0(X, z) = -\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \quad (3.43)$$

resultando,

$$c_1 = -\left(\frac{\omega \phi^{1-\alpha}}{U} X\right) \left(\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s)\right) \quad (3.44)$$

De forma similar, c_2 é dado por,

$$c_2 = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us^3} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c_1(X, z)}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.45)$$

calcula-se a primeira e segunda derivada de c_1 ,

$$\frac{\partial}{\partial z} c_1(X, z) = \frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \operatorname{sen}(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \quad (3.46)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} c_1(X, z) = \frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \quad (3.47)$$

resultando,

$$c_2 = \left(\frac{\omega \phi^{1-\alpha}}{U} X\right)^2 \frac{1}{2!} \left(\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s)\right) \quad (3.48)$$

De forma análoga, c_3 é dado por,

$$c_3 = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{Us^4} \right) \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 c_1(X, z)}{\partial z^2} \right) \right] \quad (3.49)$$

calcula-se a primeira e segunda derivada de c_2 ,

$$\frac{\partial}{\partial z} c_2(X, z) = -\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^5 \text{sen}(\lambda_n z) \text{cos}(\lambda_n H_s) \quad (3.50)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} c_2(X, z) = -\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^6 \text{cos}(\lambda_n z) \text{cos}(\lambda_n H_s) \quad (3.51)$$

resultando,

$$c_3 = -\left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{U} X\right)^3 \frac{1}{3!} \left(\frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^6 \text{cos}(\lambda_n z) \text{cos}(\lambda_n H_s)\right) \quad (3.52)$$

Então, agrupando-se os primeiros termos,

$$\begin{aligned} c(X, z) = & \left(\frac{Q}{Uh} + \frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \text{cos}(\lambda_n z) \text{cos}(\lambda_n H_s)\right) \times \left[1 - \frac{1}{1!} \left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{U} X\right)^1 \lambda_n^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{2!} \left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{U} X\right)^2 \lambda_n^4 + \frac{1}{3!} \left(\omega \frac{\phi^{1-\alpha}}{U} X\right)^3 \lambda_n^6 + \dots\right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Finalmente, retornando-se a variável X para a variável original, a solução é dada por:

$$\begin{aligned} c(x, z) = & \left(\frac{Q}{Uh} + \frac{2Q}{Uh} \sum_{n=1}^{\infty} \text{cos}(\lambda_n z) \text{cos}(\lambda_n H_s)\right) \\ & \exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{U}\right)^2 \left(\frac{\phi^{1-\alpha} x^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}\right) \lambda_n^2\right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Esta é uma equação interessante, pois todas as constantes importantes das derivadas fracionárias estão presentes de forma explícita: o parâmetro fracionário α e o parâmetro de ajuste dimensional ϕ . Assim, os procedimentos para a análise da performance e para validação da solução obtida foram feitos através de simulações com os dados do tradicional

experimento de Copenhagen. Cabe ressaltar, que esta solução é a primeira da literatura obtida com derivadas conformáveis em problemas atmosféricos.

Resultados numéricos

4.1 Avaliação do desempenho do modelo

Para avaliar o desempenho do modelo estudado, os dados gerados na simulação foram comparados com os dados observados nos experimentos de Copenhague. Esses experimentos de dispersão, descritos em [Gryning & Lyck \(1984\)](#) e [Gryning *et al.* \(1987\)](#), consistiram na liberação na atmosfera do traçador *SF6* (*hexafluoreto de enxofre*) ao norte de Copenhague. O *SF6*, um traçador de gás inerte, foi liberado de uma torre a uma altura de *115 m* e coletado próximo ao nível do solo em distâncias de *2 a 6 km* da fonte. O tempo de amostragem foi de *1 h*. O local era principalmente residencial, com o comprimento de rugosidade de *0,6 m*. As medidas meteorológicas incluíram turbulência na altura da liberação do traçador e todos os experimentos foram realizados durante o dia em condições atmosféricas moderadamente convectivas. Importante observar que este experimento fornece dados de concentração bidimensional (*integrada lateralmente*).

Os parâmetros meteorológicos para este experimento com dados bidimensionais de concentração são apresentados na Tabela [4.1](#). Observe que, neste experimento, a concentração lateralmente integrada foi normalizada pela taxa de emissão (c/Q).

Tabela 4.1: Parâmetros meteorológicos durante o experimento de Copenhagen.

Exp	$U_{10}(ms^{-1})$	$U_{115}(ms^{-1})$	$h (m)$	$\sigma_w(ms^{-1})$	$x (m)$	$c/Q(10^{-4}sm^{-2})$
1	2,1	3,4	1980	0,83	1900	6,28
					3700	2,31
2	4,9	10,6	1920	1,07	2100	5,38
					4200	2,95
3	2,4	5,0	1120	0,68	1900	8,2
					3700	6,22
					5400	4,3
4	2,5	4,6	390	0,47	4000	11,66
5	3,1	6,7	820	0,71	2100	6,72
					4200	5,84
					5100	4,97
6	7,2	13,2	1300	1,33	2000	3,96
					4200	2,22
					5900	1,83
7	4,1	7,6	1850	0,87	2000	6,7
					4100	3,25
					5300	2,23
8	4,2	9,4	810	0,72	1900	4,16
					3600	2,02
					5300	1,52
9	5,1	10,5	2090	0,98	2100	4,58
					4200	3,11
					6000	2,59

Legenda: U_{10} é a velocidade do vento medido a 10 m; U_{115} é a velocidade do vento medido a 115 m; h é a altura da CLP; σ_w é o desvio padrão da velocidade vertical; x é a distância longitudinal da fonte; (c/Q) é a concentração integrada lateralmente normalizada pela taxa de emissão.

Fonte: Adaptado (GRYNING; LYCK, 1984)

Para a análise estatística das simulações do modelo foi utilizado o software de avaliação estatística descrito por Hanna (1989) (*bootstrap resampling*), com os parâmetros estatísticos definido da seguinte maneira:

- $NMSE$ (erro quadrático médio normalizado) = $\frac{\overline{(C_o - C_p)^2}}{C_p - C_o}$,
- $FAT2$ (fator de 2), fração de dados entre $0.5 \leq \frac{C_p}{C_o} \leq 2$,
- COR (coeficiente de correlação) = $\frac{\overline{(C_o - \overline{C_o})(C_p - \overline{C_p})}}{\sigma_o \sigma_p}$,

- FB (desvio fracional) = $\frac{(\overline{C_o} - \overline{C_p})}{0.5(C_o + C_p)}$,
- FS (desvio padrão) = $\frac{(\sigma_o - \sigma_p)}{0.5(\sigma_o + \sigma_p)}$,

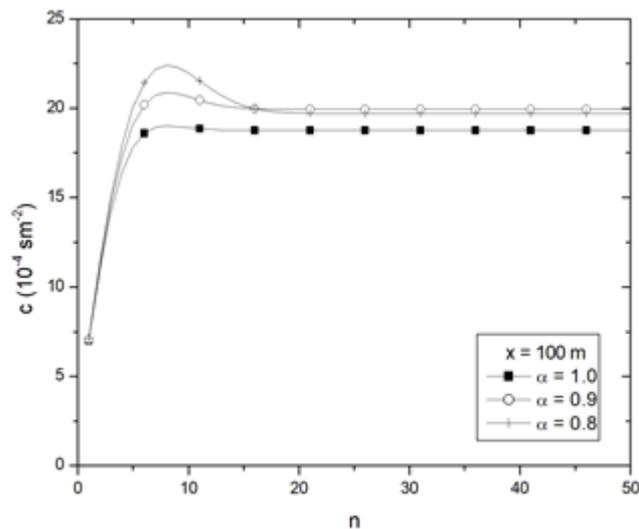
onde os subscritos o e p referem-se às quantidades observadas e previstas, respectivamente, e a barra superior indica um valor médio. O índice estatístico FB determina se as quantidades previstas subestimam ou superestimam as observadas. O índice estatístico $NMSE$ representa a dispersão do modelo em relação à dispersão dos dados. Espera-se que os melhores resultados tenham valores próximos de zero para os índices $NMSE$, FB e FS e próximos de 1 (um) para os índices COR e $FAT2$, conforme [Chang & Hanna \(2004\)](#).

4.2 Simulações e análise dos resultados obtidos

Para analisar o problema da dimensionalidade foram utilizados quatro diferentes escalas de comprimento: ($\phi = 10^{-3} m$; $\phi = 0,6 m$; $\phi = 1 m$ e $\phi = h(m)$). O caso em que ($\phi = 10^{-3} m$, representa a microescala de comprimento de Kolmogorov (η). Devido a derivada fractal que surge com o emprego da derivada conformável esta hipótese surge como uma boa alternativa. É bem conhecido que os movimentos turbulentos envolvem uma ampla gama de escalas. De uma macroescala, na qual a energia é fornecida aos vórtices, a uma microescala de Kolmogorov, na qual a energia é dissipada pela viscosidade. Na CLP a microescala de Kolmogorov é aproximadamente $\eta = 10^{-3}m$, [Colin et al. \(2017\)](#).

Inicialmente, é feita uma análise da convergência da solução dada pela Eq. (3.54) com os dados do experimento 1 de Copenhagen, conforme mostrado na Tabela 4.1. A Figura 4.1 mostra a convergência numérica da solução proposta para a concentração simulada ao nível do solo para a distância da fonte $100 m$ e parâmetro dimensional $\phi = 1 m$, em função do número de termos do somatório e diferentes valores do parâmetro fracionário α ($1,0$, $0,9$ e $0,8$).

Figura 4.1: Convergência da série no modelo usando o experimento 1 de Copenhagen, considerando a distância da fonte de 100 m para diferentes valores de α ($1,0$, $0,9$ e $0,8$).



Fonte: Produto da pesquisa

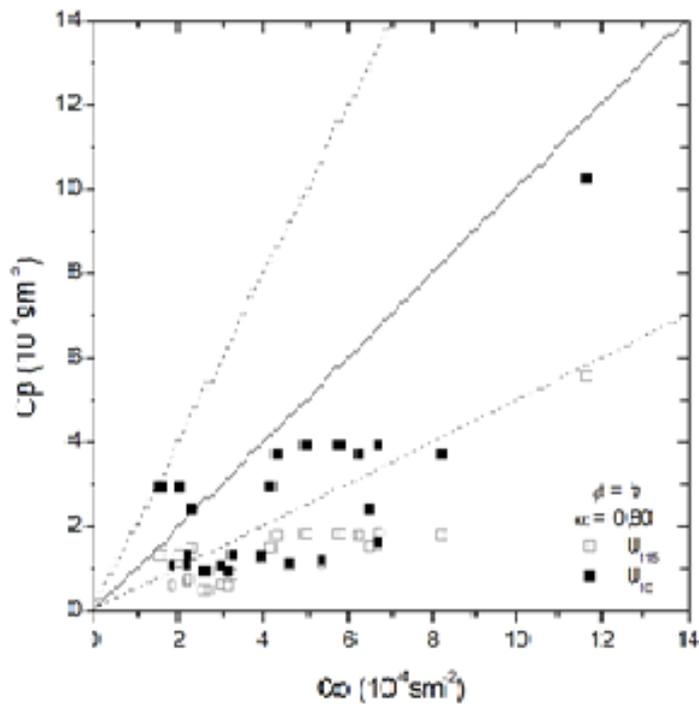
A Figura 4.1 mostra uma rápida convergência da série para concentrações ao nível do solo com o aumento do número de termos n . Além disso, observa-se que, com a diminuição do parâmetro α e para distâncias menores da fonte será necessário aumentar levemente o número de termos do somatório para obter-se a convergência desejada.

A seguir mostra-se os resultados para as simulações com diferentes valores do parâmetro fracionário α , considerando-se os seguintes casos para o parâmetro dimensional ϕ : Caso 1, representa $\phi = h$ (m) (altura da CLP); Caso 2, representa $\phi = 1$ m; Caso 3, representa $\phi = 0,6$ m (comprimento de rugosidade); Caso 4, representa $\phi = 10^{-3}$ m (escala de comprimento de Kolmogorov). Todos estes quatro casos usam o vento medido em 115 e 10 m de altura (U_{115} e U_{10} , respectivamente).

A Tabela 4.2 apresenta os resultados usando índices estatísticos para o Caso 1. Da mesma forma, a Figura 4.2 apresenta os resultados através do gráfico de espalhamento das concentrações, considerando-se a melhor resultado estatístico.

Tabela 4.2: Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = h$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.

$\phi = h (m)$ e U_{115}					
Modelo	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$\alpha = 1,00$	1,87	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,95$	1,87	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,90$	1,88	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,85$	1,88	0,81	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,80$	1,88	0,81	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,75$	1,89	0,81	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,70$	1,89	0,81	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,50$	1,91	0,80	0,13	1,03	0,83
$\phi = h (m)$ e U_{10}					
$\alpha = 1,00$	0,52	0,75	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,95$	0,52	0,75	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,90$	0,53	0,74	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,85$	0,53	0,74	0,52	0,53	0,19
$\alpha = \mathbf{0,80}$	0,53	0,74	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,75$	0,53	0,74	0,52	0,53	0,18
$\alpha = 0,70$	0,53	0,74	0,52	0,53	0,18
$\alpha = 0,50$	0,54	0,74	0,52	0,54	0,18

Figura 4.2: Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = h(m)$ e $\alpha = 0,80$ 

Legenda: Os pontos entre as linhas pontilhadas correspondem a razão $(C_p/C_o \in [0,5, 2])$

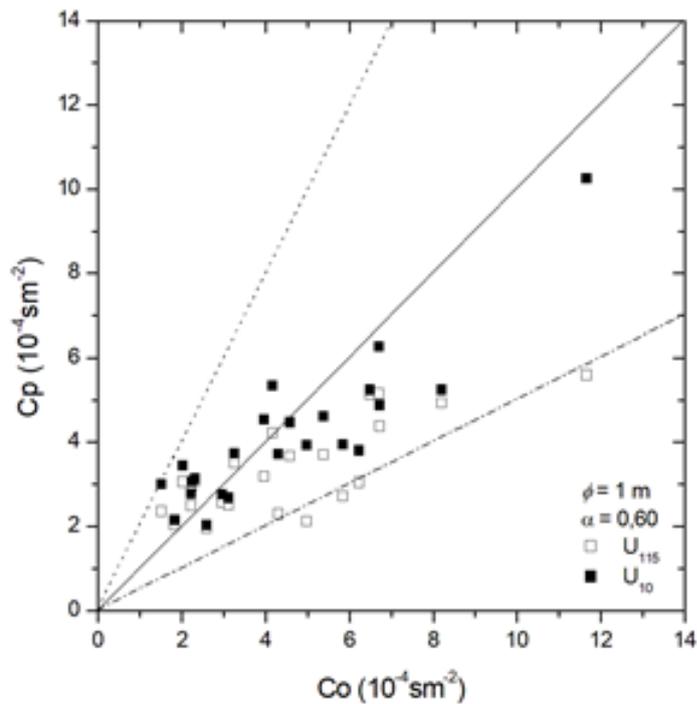
Fonte: Produto da pesquisa

Observa-se através da Tabela 4.2 e da Figura 4.2 que os resultados são muito similares para as várias mudanças do parâmetro fracionário. No entanto, percebe-se uma melhoria nos resultados quando considerado o vento em 10 m de altura.

A Tabela 4.3 apresenta os resultados usando índices estatísticos para o Caso 2. Da mesma forma, a Figura 4.3 apresenta os resultados através do gráfico de espalhamento das concentrações, considerando-se a melhor resultado estatístico.

Tabela 4.3: Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = 1m$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.

$\phi = 1 m$ e U_{115}					
Modelo	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$\alpha = 1,00$	1,87	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,90$	1,46	0,86	0,13	0,93	0,86
$\alpha = 0,80$	0,97	0,88	0,39	0,76	0,86
$\alpha = 0,70$	0,55	0,84	0,70	0,54	0,82
$\alpha = 0,60$	0,28	0,78	0,83	0,30	0,77
$\alpha = 0,55$	0,21	0,75	0,96	0,18	0,73
$\alpha = 0,50$	0,17	0,71	0,96	0,07	0,67
$\alpha = 0,45$	0,16	0,65	0,83	-0,01	0,53
$\phi = 1 m$ e U_{10}					
$\alpha = 1,00$	0,52	0,75	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,90$	0,45	0,78	0,52	0,50	0,21
$\alpha = 0,80$	0,33	0,82	0,70	0,42	0,26
$\alpha = 0,70$	0,18	0,87	0,96	0,28	0,32
$\alpha = 0,65$	0,12	0,88	1,00	0,19	0,34
$\alpha = 0,60$	0,08	0,88	1,00	0,08	0,34
$\alpha = 0,55$	0,08	0,86	0,96	-0,04	0,33
$\alpha = 0,50$	0,11	0,83	0,87	-0,16	0,30
$\alpha = 0,45$	0,17	0,79	0,74	-0,29	0,26

Figura 4.3: Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = 1m$ e $\alpha = 0,60$.

Legenda: Os pontos entre as linhas pontilhadas correspondem a razão $(C_p/C_o \in [0,5, 2])$

Fonte: Produto da pesquisa

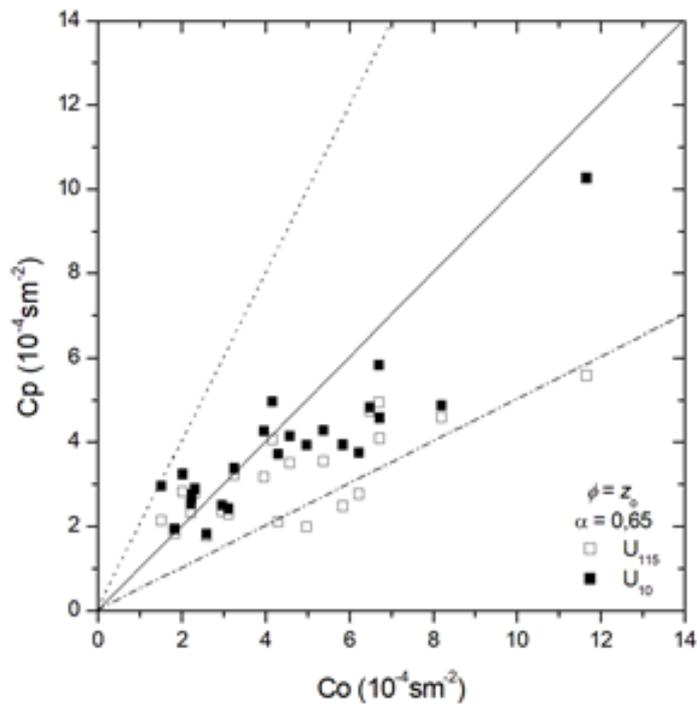
Observa-se através da Tabela 4.3 e da Figura 4.3 que os resultados são melhores para o vento medido em 10 m , considerando-se as várias mudanças do parâmetro fracionário. No entanto, percebe-se a melhor performance nos resultados quando considerado o vento em 10 m de altura e $\alpha = 0,60$, com $FAT2 = 1,00$ e $NMSE = 0,08$.

A Tabela 4.4 apresenta os resultados usando índices estatísticos para o Caso 3. Da mesma forma, a Figura 4.4 apresenta os resultados através do gráfico de espalhamento das concentrações, considerando-se a melhor resultado estatístico.

Tabela 4.4: Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = z_0$ m, em relação a variação de α e a velocidade do vento.

$\phi = z_0$ m e U_{115}					
Modelo	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$\alpha = 1,00$	1,87	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,90$	1,42	0,86	0,13	0,92	0,86
$\alpha = 0,80$	0,90	0,88	0,43	0,73	0,86
$\alpha = 0,70$	0,48	0,82	0,74	0,49	0,80
$\alpha = 0,60$	0,24	0,76	0,91	0,23	0,74
$\alpha = 0,65$	0,18	0,73	0,96	0,11	0,69
$\alpha = 0,60$	0,16	0,67	0,87	0,02	0,57
$\alpha = 0,55$	0,18	0,59	0,78	-0,05	0,36
$\phi = z_0$ m e U_{10}					
$\alpha = 1,00$	0,52	0,75	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,90$	0,44	0,78	0,52	0,49	0,22
$\alpha = 0,80$	0,31	0,83	0,74	0,41	0,27
$\alpha = 0,75$	0,23	0,86	0,91	0,34	0,30
$\alpha = 0,70$	0,16	0,88	1,00	0,25	0,33
$\alpha = \mathbf{0,65}$	0,10	0,89	1,00	0,14	0,34
$\alpha = 0,60$	0,08	0,88	0,96	0,02	0,33
$\alpha = 0,55$	0,09	0,84	0,91	-0,12	0,30

Figura 4.4: Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = z_0$ m e $\alpha = 0,65$.



Legenda: Os pontos entre as linhas pontilhadas correspondem a razão $(C_p/C_o \in [0.5, 2])$.

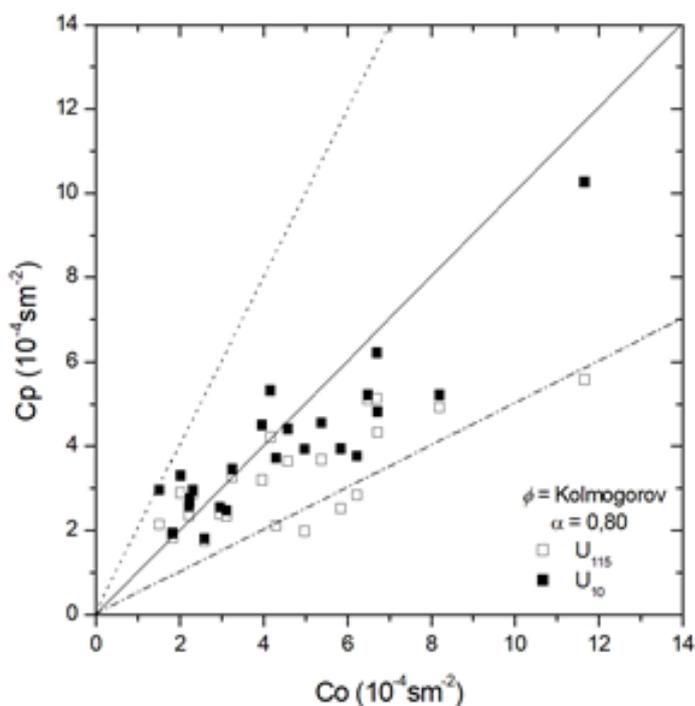
Fonte: Produto da pesquisa

Observa-se através da Tabela 4.4 e da Figura 4.4 que os resultados são melhores também para o vento medido em 10 m, considerando-se as várias mudanças do parâmetro fracionário. Percebe-se a melhor performance nos resultados quando considerado o vento em 10 m de altura e $\alpha = 0,65$, com $FAT2 = 1,00$ e $COR=0,89$.

A Tabela 4.5 apresenta os resultados usando índices estatísticos para o Caso 4. A Figura 4.5 apresenta os resultados através do gráfico de espalhamento das concentrações, considerando-se a melhor resultado estatístico.

Tabela 4.5: Índices estatísticos para avaliação da performance do modelo usando como escala de comprimento, $\phi = \eta$, em relação a variação de α e a velocidade do vento.

$\phi = \eta$ e U_{115}					
Modelo	NMSE	COR	FAT2	FB	FS
$\alpha = 1,00$	1,87	0,82	0,13	1,03	0,83
$\alpha = 0,90$	0,99	0,88	0,35	0,77	0,85
$\alpha = 0,80$	0,31	0,78	0,78	0,33	0,71
$\alpha = 0,75$	0,18	0,72	0,96	0,12	0,62
$\alpha = 0,70$	0,19	0,58	0,78	-0,02	0,33
$\alpha = 0,65$	0,34	0,43	0,61	-0,06	-0,09
$\alpha = 0,60$	0,61	0,36	0,57	0,05	-0,36
$\phi = \eta$ e U_{10}					
$\alpha = 1,00$	0,52	0,75	0,52	0,53	0,19
$\alpha = 0,90$	0,33	0,82	0,70	0,43	0,25
$\alpha = 0,85$	0,19	0,87	0,91	0,30	0,30
$\alpha = \mathbf{0,80}$	$\mathbf{0,09}$	$\mathbf{0,89}$	$\mathbf{1,00}$	$\mathbf{0,11}$	$\mathbf{0,31}$
$\alpha = 0,75$	0,09	0,84	0,91	-0,12	0,23
$\alpha = 0,70$	0,23	0,77	0,65	-0,37	0,12

Figura 4.5: Espalhamento da concentração de poluentes usando $\phi = \eta$ e $\alpha = 0,80$.

Legenda: Os pontos entre as linhas pontilhadas correspondem a razão ($C_p/C_o \in [0.5, 2]$)

Fonte: Produto da pesquisa

Observa-se através da Tabela 4.5 e da Figura 4.5 que os resultados são melhores para o vento medido em $10 m$, considerando-se as várias mudanças do parâmetro fracionário. Contudo, percebe-se a melhor performance nos resultados quando considerado o vento em $10 m$ de altura e $\alpha = 0,80$, com $FAT2 = 1,00$, $COR = 0,89$ e $NMSE = 0,09$.

Neste ponto, é importante frisar que durante o processo de resolução da equação de difusão-advecção, a derivada conformável transforma uma equação fracionária em uma equação de ordem inteira, fazendo com que o efeito de memória (*devido a integral na derivada de Caputo*) seja perdido na solução da equação de difusão-advecção, tornando a equação com caráter local (*fractal*). Neste sentido, este trabalho mostrou que a escala de comprimento de Kolmogorov, a qual aqui representa a menor escala fractal no processo de dispersão, pode ser considerada a escala que ajusta a dimensão do problema com comportamento de dimensão fractal. A consistência foi demonstrada com os melhores resultados nas simulações.

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo principal a elaboração de uma revisão histórica das contribuições na evolução da teoria do cálculo fracionário e sua aplicação na modelagem para solução de problemas teóricos e empíricos. Neste sentido, a revisão de literatura foi mais abrangente que as tradicionais. Como extensão dessa proposta, no tocante às aplicações, apresentou-se uma solução analítica para o problema da dispersão atmosférica usando derivada conformável, no sentido de tentar responder questões importantes sobre a derivada conformável e o parâmetro de correção dimensional. Aplicou-se pela primeira vez a definição da derivada conformável em conjunto com o método *LDM* em problemas de dispersão de poluentes na *CLP*, obtendo-se na solução uma função exponencial, diferentemente do que se obtém usualmente com a aplicação de derivadas fracionárias tradicionais que seria uma função de Mittag-Leffler, considerada a rainha das funções exponenciais.

Com relação ao problema da dimensionalidade, o parâmetro de consistência dimensional proporcionou uma solução consistente. Assim, utilizou-se quatro diferentes escalas de comprimento ($\phi = 10^{-3} m$; $\phi = 0,6 m$; $\phi = 1 m$ e $\phi = h$). Em $\phi = h$, houve comportamento não compatível com os dados observados de concentração ao nível do solo. A microescala de Kolmogorov, por apresentar características de dimensão fractal, apresentou o melhor desempenho em $\alpha = 0,80$, obtendo-se o melhor conjunto de índices estatísticos: $NMSE = 0,09$; $COR = 0,89$; $FAT2 = 1,00$; $FB = 0,11$ e $FS = 0,31$. Embora a utilização do comprimento de rugosidade tenha dado bons resultados para $\alpha = 0,65$, o parâmetro fracionário se desvia muito da ordem inteira, sendo similares aos resultados com $\phi = 1 m$.

5.1 Considerações e trabalhos futuros

Finalmente, este trabalho mostrou que o cálculo fracionário é um tema desafiador e que ainda permanece sendo subutilizado, carecendo de muita atenção por todos os pesquisadores que usam derivadas na modelagem de solução de problemas em física, matemática, engenharias e demais área do conhecimento científico. Portanto, esta é uma ferramenta imprescindível para refinar a descrição da maioria dos fenômenos naturais, tendo mais ênfase nos fenômenos físicos onde existe dependência temporal e efeito de memória. Deve-se ter em mente que o cálculo fracionário é a generalização do cálculo diferencial e integral.

Sugere-se como possíveis investigações futuras, a utilização de outros operadores fracionários (*local e não-local*) em problemas de dispersão de poluentes na atmosfera.

Referências Bibliográficas

- ABDELJAWAD, Thabet. On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 279, p. 57–66, 2015.
- ABELLÁN, Mónica Blanco. *Hermenèutica del càlcul diferencial a l'Europa del segle XVIII de l'Analyse des infiniment petits de L'Hôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802)*. [S.l.]: Universitat Autònoma de Barcelona,, 2006.
- ADOMIAN, George. *Solving Frontier Problems Decomposition Method*. [S.l.]: **the Springer of Physics: Berlin**, 1994.
- AGARWAL, P; EL-SAYED, AA. Non-standard finite difference and chebyshev collocation methods for solving fractional diffusion equation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Elsevier, v. 500, p. 40–49, 2018.
- AKKURT, Abdullah; TÜRKAY, Merve Yildirim; YILDIRIM, Hüseyin. A new generalized fractional derivative and integral. *Konuralp Journal of Mathematics*, v. 5, p. 248–259, 11 2017.
- ALMEIDA, Ricardo. A caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 44, p. 460–481, 2017.
- ALMEIDA, Ricardo; GUZOWSKA, Małgorzata; ODZIJEWICZ, Tatiana. A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives. *Open Mathematics*, De Gruyter, v. 14, n. 1, p. 1122–1124, 2016.
- ANDRADE, AMF; LIMA, EG; DARTORA, CA. An introduction to fractional calculus and its applications in electric circuits. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, p. e3314, 2018.
- ARYA, S Pal. Modeling and parameterization of near-source diffusion in weak winds. *Journal of Applied Meteorology*, v. 34, n. 5, p. 1112–1122, 1995.
- ATANGANA, Abdon. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, v. 20, p. s.n, 01 2016.
- AVILA, EB. **A Study of Fractional Calculus Applied to the Modeling of Vibratory Systems Containing Viscoelastic Damping**. *Universidade Federal de Uberlândia*, 2010.
- BALEANU, D; MOHAMMADI, H.; REZAPOUR, S. A mathematical theoretical study of a particular system of caputo–fabrizio fractional differential equations for the rubella disease model. *Advances in Difference Equations*, 2020.
- BALZOTTI, Caterina; D'OVIDIO, Mirko; LORETI, Paola. Fractional sis epidemic models. *Fractal and Fractional*, v. 4, p. 44, 08 2020.

BARBOSA, Everaldo Fernandes *et al.* **A regra de L'Hopital: análise historica da regra de L'Hopital: a importancia da historia da matematica na disciplina de calculo.** IMECC-Repositoriounicamp.br, 2008.

BARON, Margaret E; BOS, Henk Jan Maarten. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.* [S.l.]: Editora Universidade de Brasília, 1985. c1974 p.

BASSALO, José Maria Filardo. A crônica do cálculo: Iii. contemporâneos de newton e leibniz. *Revista Brasileira, de Ensino de Física*, v. 18, n. 4, 1996.

BERBERAN-SANTOS, Mário N. Analytical inversion of the laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *Journal of Mathematical Chemistry*, Springer, v. 38, n. 2, p. 165–173, 2005.

BISWAS, Karabi *et al.* *Fractional-order devices.* [S.l.]: Springer, 2017.

_____. Introduction to fractional-order elements and devices. In: *Fractional-Order Devices.* [S.l.]: Springer, 2017. p. 1–20.

CAMARGO, RF. *Cálculo Fracionário e Aplicações, 2009. 135 f.* Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Matemática). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2009.

CAMARGO, RF; CAPELAS, EO. *Cálculo Fracionário, 2015. 184 f.* [S.l.]: Livraria Física - ISBN10: 8578613295, 2015.

CASSIRER, Ernst. Newton and leibniz. *The Philosophical Review*, JSTOR, v. 52, n. 4, p. 366–391, 1943.

CASTILLO-NEGRETE, Diego del. Truncation effects in superdiffusive front propagation with lévy flights. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 3, p. 031120, 2009.

CHANG, Joseph C; HANNA, Steven R. Air quality model performance evaluation. *Meteorology and Atmospheric Physics*, Springer, v. 87, n. 1-3, p. 167–196, 2004.

COLIN, Jeanne *et al.* Adaptation of the meteorological model meso-nh to laboratory experiments: implementations and validation. *Geoscientific Model Development Discussions*, Copernicus GmbH, p. 1–32, 2017.

CRANK, John. *The mathematics of diffusion.* [S.l.]: Oxford university press, 1979.

CUAHUTENANGO-BARRO, B; TANECO-HERNÁNDEZ, MA; GÓMEZ-AGUILAR, JF. On the solutions of fractional-time wave equation with memory effect involving operators with regular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 115, p. 283–299, 2018.

DEGRAZIA, Gervásio A; MOREIRA, Davidson M; VILHENA, Marco T. Derivation of an eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *Journal of Applied Meteorology*, v. 40, n. 7, p. 1233–1240, 2001.

DONG, Nguyen Phuong; LONG, Hoang Viet; KHASTAN, Alireza. Optimal control of a fractional order model for granular seir epidemic with uncertainty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, p. 105312, 2020.

- FILHO, Jenner Barretto Bastos. Causalidade,(in) determinismo e (im) previsibilidade: por que o conceito de causa é tão importante? *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 30, n. 3, p. 3304–1, 2008.
- GARRAPPA, Roberto; KASLIK, Eva; POPOLIZIO, Marina. Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 5, p. 407, 2019.
- GÓMEZ-AGUILAR, José Francisco *et al.* Analytical solutions of the electrical rlc circuit via liouville–caputo operators with local and non-local kernels. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 18, n. 8, p. 402, 2016.
- GORENFLO, Rudolf; LUCHKO, Yuri; MAINARDI, Francesco. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 118, n. 1-2, p. 175–191, 2000.
- GORENFLO, Rudolf *et al.* Fractional calculus and continuous-time finance iii : the diffusion limit. In: KOHLMANN, Michael; TANG, Shanjian (Ed.). *Mathematical Finance*. Basel: Birkhäuser Basel, 2001. p. 171–180. ISBN 978-3-0348-8291-0.
- GOULART, AG; LAZO, MJ; SUAREZ, JMS. A deformed derivative model for turbulent diffusion of contaminants in the atmosphere. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 557, p. 124847, 2020.
- GOULART, AGO *et al.* Fractional derivative models for atmospheric dispersion of pollutants. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 477, p. 9–19, 2017.
- GRYNING, Sven-Erik *et al.* Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters. *Atmospheric Environment (1967)*, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 79–89, 1987.
- GRYNING, Sven-Erik; LYCK, Erik. Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *Journal of climate and applied meteorology*, v. 23, n. 4, p. 651–660, 1984.
- GUTIERREZ, Ricardo Enrique; ROSARIO, Joao Mauricio; MACHADO, JA. Fractional order calculus: basic concepts and engineering applications. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2010, p. 1–19, 2010.
- HANNA, Steven R. Confidence limits for air quality model evaluations, as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. *Atmospheric Environment (1967)*, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 1385–1398, 1989.
- HE, Ji-Huan. Fractal calculus and its geometrical explanation. *Results in Physics*, Elsevier, v. 10, p. 272–276, 2018.
- HEYMANS, Nicole; PODLUBNY, Igor. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with riemann-liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, Springer, v. 45, n. 5, p. 765–771, 2006.
- HUEBNER, KHH *et al.* *Finite element method for engineers*. [S.l.]: J. Wiley Sons, New York, 2001. 744 p.

- IBRAHIM, Rabha W; HASAN, Ali M; JALAB, Hamid A. A new deformable model based on fractional wright energy function for tumor segmentation of volumetric brain mri scans. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, Elsevier, v. 163, p. 21–28, 2018.
- IYIOLA, Olaniyi S; NWAENZE, Eze R. Some new results on the new conformable fractional calculus with application using d’alambert approach. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, v. 2, n. 2, p. 115–122, 2016.
- JR, Carlos A Valentim *et al.* Can fractional calculus help improve tumor growth models? *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, p. 112964, 2020.
- KAPLAN, Melike; AKBULUT, Arzu. Application of two different algorithms to the approximate long water wave equation with conformable fractional derivative. *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, Taylor & Francis, v. 25, n. 2, p. 77–84, 2018.
- KAPLAN, Melike; BEKIR, Ahmet. Construction of exact solutions to the space–time fractional differential equations via new approach. *Optik*, Elsevier, v. 132, p. 1–8, 2017.
- KATUGAMPOLA, Udita N. New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 218, n. 3, p. 860–865, 2011.
- _____. **A New Fractional Derivative with Classical Properties**. 10 2014.
- KHALIL, Roshdi *et al.* A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 264, p. 65–70, 2014.
- KHAMARA, Edward J. *Space, time, and theology in the Leibniz-Newton controversy*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 2013. v. 6.
- KIRYAKOVA, Virginia. A brief story about the operators of the generalized fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy of Sciences, v. 11, n. 2, p. 203–220, 2008.
- LASKIN, Nikolai. Fractional quantum mechanics and lévy path integrals. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 268, n. 4-6, p. 298–305, 2000.
- LENZI, EK *et al.* Anomalous diffusion, nonlinear fractional fokker–planck equation and solutions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 319, p. 245–252, 2003.
- LIANG, Xin *et al.* An anomalous diffusion model based on a new general fractional operator with the mittag-leffler function of wiman type. *Advances in Difference Equations*, SpringerOpen, v. 2018, n. 1, p. 25, 2018.
- LUCHKO, Yuri. Fractional schrödinger equation for a particle moving in a potential well. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 54, n. 1, p. 012111, 2013.
- LUNDBERG, Kent H; MILLER, Haynes R; TRUMPER, David L. Initial conditions, generalized functions, and the laplace transform troubles at the origin. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 27, n. 1, p. 22–35, 2007.
- MACHADO, JA; JESUS, Isabel. Suggestion from the past? *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy of Sciences, v. 7, n. 4, p. 403–407, 2004.

- MACHADO, JA Tenreiro. Fractional derivatives and negative probabilities. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 79, p. 104913, 2019.
- MACHADO, JA Tenreiro; KIRYAKOVA, Virginia. The chronicles of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, De Gruyter, v. 20, n. 2, p. 307–336, 2017.
- MACHADO, J Tenreiro; KIRYAKOVA, Virginia; MAINARDI, Francesco. A poster about the recent history of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 13, n. 3, p. 329p–334p, 2010.
- _____. Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 1140–1153, 2011.
- MACHADO, J Tenreiro; MAINARDI, Francesco; KIRYAKOVA, Virginia. Fractional calculus: Quo vadimus?(where are we going?). *Fractional Calculus and Applied Analysis*, De Gruyter, v. 18, n. 2, p. 495–526, 2015.
- MAINARDI, Francesco; GORENFLO, Rudolf. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 10, n. 3, p. 269–308, 2008.
- MATLOB, Mohammad Amirian; JAMALI, Yousef. The concepts and applications of fractional order differential calculus in modeling of viscoelastic systems: A primer. *Critical ReviewsTM in Biomedical Engineering*, Begel House Inc., v. 47, n. 4, 2019.
- MILLER, Kenneth S; ROSS, Bertram. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. [S.l.]: Wiley, 1993.
- MORALES-DELGADO, VF; GÓMEZ-AGUILAR, JF; TANECO-HERNÁNDEZ, MA. Analytical solution of the time fractional diffusion equation and fractional convection-diffusion equation. *Revista mexicana de física*, Sociedad Mexicana de Física, v. 65, n. 1, p. 82–88, 2019.
- MOREIRA, Davidson; MORET, Marcelo. A new direction in the atmospheric pollutant dispersion inside the planetary boundary layer. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, v. 57, n. 1, p. 185–192, 2018.
- MOREIRA, DM *et al.* Semi-analytical model for pollution dispersion in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 39, n. 14, p. 2673–2681, 2005.
- MOREIRA, Davidson; TIRABASSI, Tiziano. Modelo matemático de dispersão de poluentes na atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental. *Ambiente & Sociedade*, SciELO Brasil, p. 159–172, 2004.
- MOREIRA, Davidson *et al.* New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 144, p. 118667, 2019.
- MOREIRA, Davidson Martins *et al.* A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 83, p. 254–259, 2014.

- NEIRAMEH, Ahmad. New extension for sub equation method and its application to the time-fractional burgers equation by using of fractional derivative. *TEMA (São Carlos)*, SciELO Brasil, v. 18, n. 2, p. 225–232, 2017.
- NOVIKOV, VV *et al.* Anomalous relaxation in dielectrics. equations with fractional derivatives. *Materials Science (0137-1339)*, v. 23, n. 4, 2005.
- OLDHAM, Keith; SPANIER, Jerome. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.
- OLIVEIRA, DS; OLIVEIRA, E Capelas de. Hilfer–katugampola fractional derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 37, n. 3, p. 3672–3690, 2018.
- OLIVEIRA, Daniela S; OLIVEIRA, E Capelas de. On the generalized (k, ρ) -fractional derivative. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, v. 4, p. 133–145, 2018.
- OLIVEIRA, HS. *Introdução ao cálculo de ordem arbitrária. 122f.* Tese (Doutorado) — (Mestrado Profissional em Matemática)- Instituto de Matemática Estatística e Computação Gráfica - UNICAMP, 2010.
- ÖNAL, Nisa Özge *et al.* A mathematical approach with fractional calculus for the modelling of children’s physical development. *Computational and mathematical methods in medicine*, Hindawi, v. 2019, 2019.
- ORTIGUEIRA, Manuel D; MACHADO, JA Tenreiro. What is a fractional derivative? *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 293, p. 4–13, 2015.
- PATNAIK, Sansit; HOLLKAMP, John P; SEMPERLOTTI, Fabio. Applications of variable-order fractional operators: a review. *Proceedings of the Royal Society A*, The Royal Society Publishing, v. 476, n. 2234, p. 20190498, 2020.
- PATNAIK, Sansit; SEMPERLOTTI, Fabio. Application of variable-and distributed-order fractional operators to the dynamic analysis of nonlinear oscillators. *Nonlinear Dynamics*, Springer, p. 1–20, 2020.
- PERDIKARIS, Paris; KARNIADAKIS, George Em. Fractional-order viscoelasticity in one-dimensional blood flow models. *Annals of biomedical engineering*, Springer, v. 42, n. 5, p. 1012–1023, 2014.
- PIAUI, William de Siqueira. Leibniz e as duas faces do labirinto do contínuo: uma introdução. [http://filosofia. ufc. br/argumentos/](http://filosofia.ufc.br/argumentos/), 2010.
- PODLUBNY, Igor. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 5, p. 367–386, 06 2002.
- PODLUBNY, Igor; EL-SAYED, Ahmed MA. On two definitions of fractional calculus. *Institute of Experimental Physics, preprint UEF, ISBN 80-7099-252-2*, p. 03–96, 1996.
- RAMOS, Pedro Felipe Pavanelo; CAMARGO, RF. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru*, v. 1, p. 15–22, 2012.

- RIDA, SZ; EL-SHERBINY, HM; ARAFA, AAM. On the solution of the fractional nonlinear schrödinger equation. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 372, n. 5, p. 553–558, 2008.
- RIZZA, U *et al.* Development of a grid-dispersion model in a large-eddy-simulation-generated planetary boundary layer. *Il nuovo cimento C*, Societa italiana di fisica, v. 26, n. 3, p. 297–309, 2003.
- ROGOSIN, Sergei; DUBATOVSKAYA, Maryna. Letnikov vs. marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 1, p. 3, 2018.
- ROGOSIN, Sergei; MAINARDI, Francesco. George william scott blair—the pioneer of factional calculus in rheology. *Communications in Applied and Industrial Mathematics* - doi: 10.1685/journal.caim.481, v. 6, n. 1, 2014.
- SABATIER, JATMJ; AGRAWAL, Ohm Parkash; MACHADO, JA Tenreiro. *Advances in fractional calculus*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 4.
- SHEIKH, Nadeem Ahmad *et al.* Comparison and analysis of the atangana–baleanu and caputo–fabrizio fractional derivatives for generalized casson fluid model with heat generation and chemical reaction. *Results in physics*, Elsevier, v. 7, p. 789–800, 2017.
- SILVA, Juliana C; PIAUÍ, William S. Carta de leibniz ao matemático dangicourt sobre as mônadas e o cálculo infinitesimal. <http://filosofia. ufc. br/argumentos/>, 2010.
- SILVA, Warley de Moraes. A descoberta do cálculo sob as perspectivas de newton e leibniz. **Universidade Federal de Minas Gerais**, 2015.
- SOHAIL, Ayesha *et al.* Physics of fractional imaging in biomedicine. *Progress in biophysics and molecular biology*, Elsevier, v. 140, p. 13–20, 2018.
- SOLAECHÉ, Maria Cristina G. La controversia l’hospital–bernoulli. *Divulgaciones Matemáticas*, v. 1, p. 99–104, 1993.
- SONIN, N Ya. On differentiation with arbitrary index. *Moscow Matem. Sbornik*, v. 6, n. 1, p. 1–38, 1869.
- SOUSA, J Vanterler da C; OLIVEIRA, E Capelas de. On the ψ -hilfer fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 60, p. 72–91, 2018.
- SUN, HongGuang *et al.* A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 64, p. 213–231, 2018.
- TANG, Lei *et al.* Non-gaussian diffusion imaging with a fractional order calculus model to predict response of gastrointestinal stromal tumor to second-line sunitinib therapy. *Magnetic resonance in medicine*, Wiley Online Library, v. 79, n. 3, p. 1399–1406, 2018.
- TARASOV, Vasily E. No violation of the leibniz rule. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 18, n. 11, p. 2945–2948, 2013.

_____. On chain rule for fractional derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 30, n. 1-3, p. 1–4, 2016.

TEODORO, G Sales; MACHADO, JA Tenreiro; OLIVEIRA, E Capelas De. A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 388, p. 195–208, 2019.

TEODORO, Graziane Sales *et al.* Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP-IMECC, 2019.

TIRABASSI, T; RIZZA, U. Applied dispersion modelling for ground-level concentrations from elevated sources. *Atmospheric Environment*, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 611–615, 1994.

VALÉRIO, Duarte; MACHADO, José; KIRYAKOVA, Virginia. Some pioneers of the applications of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, De Gruyter, v. 17, n. 2, p. 552–578, 2014.

VALÉRIO, Duarte *et al.* Fractional calculus: A survey of useful formulas. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 222, n. 8, p. 1827–1846, 2013.

WANG, Yuan-Yuan *et al.* Fractional-order darwinian pso-based feature selection for media-adventitia border detection in intravascular ultrasound images. *Ultrasonics*, Elsevier, v. 92, p. 1–7, 2019.

XAVIER, PHF; SOLEDADE, AL; MOREIRA, DM. A new perspective for the dispersion of air pollutants in the atmospheric boundary layer. *In, X CNEM – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica.*, In, X CNEM – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica., v. 10, p. 1, 2018.

YAN, Yonggui; SUN, Zhi-Zhong; ZHANG, Jiwei. Fast evaluation of the caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations: a second-order scheme. *Communications in Computational Physics*, Cambridge University Press, v. 22, n. 4, p. 1028–1048, 2017.

YANG, Xiao-Jun; MACHADO, JA Tenreiro. A new fractional operator of variable order: application in the description of anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 481, p. 276–283, 2017.

YANG, Xiao-Jun *et al.* On linear and nonlinear electric circuits: A local fractional calculus approach. In: *Fractional Order Systems*. [S.l.]: Elsevier, 2018. p. 329–355.

YUE, Chen *et al.* The plethora of explicit solutions of the fractional ks equation through liquid–gas bubbles mix under the thermodynamic conditions via atangana–baleanu derivative operator. *Advances in Difference Equations*, SpringerOpen, v. 2020, n. 1, p. 1–12, 2020.

ZHAO, Dazhi; LUO, Maokang. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, Springer, v. 54, n. 3, p. 903–917, 2017.

ZULFEQARR, Fahed; UJLAYAN, Amit; AHUJA, Priyanka. **A new fractional derivative and its fractional integral with some example.** 04 2017.

O Cálculo fracionário: Aspectos históricos e relevância na modelagem de solução de problemas.

José Roberto Dantas da Silva

Salvador, 16 Dezembro de 2020.